МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА–2026»

(математика)

Второй день

Якутск 2026

Сборник содержит задачи XXXIII Международной олимпиады школьников «Туймаада» по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: С. Л. Берлов, А. А. Волкова, А. С. Голованов, К. П. Кохась, А. Д. Терёшин. Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров. Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

© Министерство образования и науки РС(Я), 2026.

Старшая лига

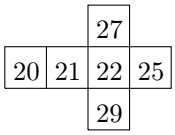
5. Назовём бесконечную последовательность вещественных чисел a_1, a_2, ... *прогрессивной*, если для каждого натурального числа n можно указать такое натуральное число k, что $a_n + a_k = a_{n+k}$. Докажите, что любые числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ являются (в этом же порядке) первыми m членами некоторой прогрессивной последовательности.

(*А. Голованов*)

6. Положительное число будем называть *одинарным*, если его дробная часть равна $\frac{1}{m}$ для некоторого натурального m. Пусть q — рациональное число. Докажите, что если для всех натуральных k число q^k одинарное, то $q = \frac{1}{n}$ при некотором натуральном n.

(*А. Голованов*)

7. На гранях куба (во внутренних точках) сидят мухи. Два паука — Пакк и Вукк — играют в такую игру. Ходят по очереди, первым ходит Пакк. На своем ходе паук должен выбрать любую вершину куба и съесть произвольное число мух (в сумме не меньше одной), сидящих на гранях, прилегающих к этой вершине. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Пусть вначале на гранях сидело 20, 21, 22, 25, 27, 29 мух как показано на рисунке. Кто выиграет при правильной игре?



(*B. Kadam, A. Shaiju*)

8. Векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяют условию

$$\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{z}\| \cdot \|\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\| = \|\vec{x} + \vec{z}\| \cdot \|\vec{y} + \vec{z}\|.$$

Докажите, что эти векторы линейно зависимы.

(*N. El Idrissi, H. Zoubeir*)

Младшая лига

5. Все положительные рациональные числа покрашены в два цвета, причем для всех $x > 0$ числа x и $\sqrt{x}$ окрашены одинаково. Докажите, что найдутся два числа одного цвета, разность которых равна 1.

(*А. Голованов*)

6. Для каких натуральных $n > 1$ при любом вырезании из квадрата $n \times n$ нескольких клеток, не имеющих ни общих сторон, ни общих вершин, оставшуюся часть квадрата всегда можно разрезать на доминошки и тримино-«уголки»? (Не обязательно использовать оба типа фигур.)

(*С. Берлов*)

7. В треугольнике ABC проведена медиана AM. На отрезке BM отмечена точка D так, что $AB = AD$. Окружность ω проходит через точки B и D, касается отрезка AM в точке X и пересекает отрезок AB в точке Y. Докажите, что точки X, Y и C лежат на одной прямой.

(*А. Терёшин*)

8. 15 натуральных чисел таковы, что сумма любых 11 из них делится хотя бы на одно из чисел 5 и 7. При каком наибольшем k можно утверждать, что одно из чисел 5 и 7 является делителем хотя бы k из этих 15 чисел?

(*А. Голованов*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Старшая лига

5. Рассмотрим последовательность, которая начинается $a_1, a_2, \ldots a_m$, а каждый последующий член строится по правилу $a_n = a_{n-m} + a_m$. Покажем, что эта последовательность прогрессивна. Действительно, для любого $n \geqslant 1$ возьмем $k = m$, тогда по построению $a_{n+m} = a_n + a_m$, что и требуется.

6. Заметим, что число одинарное тогда и только тогда, когда в его несократимой записи числитель сравним с 1 по модулю знаменателя. Пусть $q = \frac{n}{m}$ (несократимая запись). Мы знаем, что $n^k \equiv 1 \pmod{m^k}$ для любого k. Нам необходимо показать, что $n = 1$. Предположим, что это не так.

Рассмотрим наибольшую степень знаменателя, на которую делится разность $n-1$, т. е. такое число s, что $n-1$ кратно m^s и не кратно m^{s+1}. По нашему предположению $n^{s+1} \equiv 1 \pmod{m^{s+1}}$. Тогда $n^{s+2} \equiv n \not\equiv 1 \pmod{m^{s+1}}$, что противоречит условию $n^{s+2} \equiv 1 \pmod{m^{s+2}}$.

7. Ответ: выигрывает Пакк.

Стратегия Пакка следующая: первым ходом он добьется того, что на каждой паре противоположных граней останется равное число мух. Для этого в каждой паре он выбирает грань, в которой больше мух, и съедает, сколько необходимо. Так как выбраны три грани, никакие две из которых не являются противоположными, они имеют общую вершину, а значит, этот ход допустим.

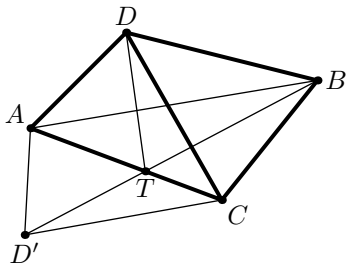
После этого Пакк поддерживает ситуацию, в которой на противоположных сторонах остается равное число мух, делая ходы, центрально-симметричные ходам Вукка.

8. Построим тетраэдр $ABCD$, такой что $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{z}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{y}$. Тогда $\vec{x} + \vec{z} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{z} + \vec{y} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$ и $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$. Тогда условие переписывается как

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

В плоскости ABC рассмотрим точку D', такую что треугольники ADC и $AD'C$ равны и точки B и D' лежат в разных полуплоскостях относительно AC. Проверим, что $BD' \geqslant BD$, и равенство достигается только в случае $D = D'$.

Пусть T — точка пересечения отрезка BD' с прямой AC. Тогда в силу равенства треугольников ACD и ACD' получаем, что $TD = TD'$. Тогда $BD' = BT + TD' = BT + TD \geqslant BD$ по неравенству треугольника, и равенство достигается лишь в случае, когда точки B, T, D лежат на одной прямой, причем именно в таком порядке, что равносильно $D = D'$.



Рассмотрим четырехугольник $ABCD'$. По неравенству Птолемея,

$$AC \cdot BD' \leqslant AB \cdot CD' + BC \cdot AD' = AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

Тогда либо $AC = 0$, либо $BD = BD'$. В обоих случаях наши четыре точки оказываются в одной плоскости, что равносильно линейной зависимости исходных векторов.

Младшая лига

5. Предположим противное. Рассмотрим числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$. Их разность равна 1, значит, они разного цвета. Рассмотрим их квадраты, это $\frac{1}{4}$ и $\frac{9}{4}$, они также разного цвета, так как цвет числа совпадает с цветом квадрата этого числа. Но тогда одно из них совпадает по цвету с $\frac{5}{4}$. При этом, $\frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}$, противоречие.

6. Ответ: для четных n.

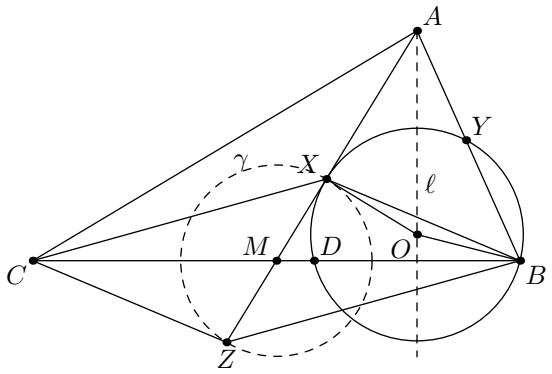
Случай 1. Пусть n четно. Разобьем доску на квадратики 2×2. В каждом квадратике вырезано не более одной клетки. Если вырезана одна клетка, оставшаяся часть является уголком, и больше ничего резать не надо. Если же из квадратика ничего не вырезано, то его можно разрезать на две доминошки.

Случай 2. Пусть n нечётно. Вырежем из второй строки все клетки с нечётными номерами. Тогда уже первую строку невозможно покрыть доминошками и уголками. Действительно, предположим противное, т. е. что первую строку удалось покрыть. Так как длина строки нечётна, должны быть фигурки, покрывающие нечётное количество

её клеток. Уголок таким образом расположить невозможно, значит, это должна быть вертикальная доминошка. Рассмотрим первую вертикальную доминошку, она должна стоять на нечетной позиции, что невозможно, так как нечетные клетки во второй строке вырезаны.

7. Мы будем доказывать равенство углов $\angle CXM = \angle AXY$, из которого сразу следует требуемое. Отметим точку Z, симметричную точке X относительно M. Тогда $CXBZ$ — параллелограмм. Значит, $\angle CXZ = \angle XZB$. Так как прямая AX касается окружности (XYB), имеет место равенство $\angle AXY = \angle ABX$. Нам осталось проверить равенство углов $\angle ABX = \angle AZB$, что равносильно подобию треугольников AXB и ABZ, а это, в свою очередь, равносильно соотношению

$$AB^2 = AX \cdot AZ. \qquad (*)$$



Пусть γ — окружность, построенная на отрезке XZ как на диаметре. Заметим, что степень точки A относительно окружности γ равна $AX \cdot AZ$, а степень точки A относительно окружности (B) равна AB^2, где (B) — окружность нулевого радиуса с центром в точке B. Покажем, что радикальной осью ℓ окружностей γ и (B) является серединный перпендикуляр к отрезку BD, отсюда сразу будет следовать равенство $(*)$. Пусть O — центр окружности $(XYBD)$. Из касания AX и (XYB) получаем, что $OX \perp XZ$, значит, прямая OX касается окружности γ и степень точки O относительно γ равна $OX^2 = OB^2$. Значит, точка O лежит на радикальной оси ℓ. С другой стороны, M — центр окружности γ, значит, радикальная ось ℓ перпендикулярна прямой BM. Прямая, проходящая через O перпендикулярно BM, и есть серединный перпендикуляр к отрезку DB, что нам и требовалось.

8. Ответ: 13.

Пример. Возьмем числа 5, 30 и еще 13 чисел, равных 7. Если мы берём 11 семёрок, то сумма делится на 7. Суммы $10 \cdot 7 + 5$ и $10 \cdot 7 + 30$ делятся на 5, и $9 \cdot 7 + 5 + 30$ делятся на 7.

Оценка. *Шаг 1.* Покажем, что в наборе существуют два числа a и b, дающие разные остатки как при делении на 5, так и при делении

на 7. Предположим противное: пусть любые два числа сравнимы по одному из этих модулей. Возьмём в данном наборе произвольное число x. Каждое из остальных чисел должно давать при делении хотя бы на одно из чисел 5 и 7 такой же остаток, как x. Если не все числа дают одинаковые остатки при делении на 5, то найдётся число a, дающее при делении на 5 не такой остаток, как x (а на 7, следовательно, такой же). Если не все числа дают одинаковые остатки при делении на 7, то найдётся число b, дающее при делении на 7 не такой остаток, как x (а на 5 такой же). Но тогда у чисел a и b разные остатки и при делении на 5, и при делении на 7. Противоречие.

Значит, все числа должны быть сравнимы по одному из модулей, не умаляя общности, можно считать, что это модуль 5. Если все числа делятся на 5, мы уже победили. А если не делятся, то сумма любых 11 чисел не делится на 5, а тогда она делится на 7. В этом случае все числа должны быть сравнимы по модулю 7 и, более того, давать нулевой остаток. В любом случае мы получаем что на одно из чисел 5 или 7 делятся все числа.

Шаг 2. Назовем числа, отличные от a и b, *обычными.* Покажем, что обычные числа дают не более двух разных остатков по модулю 35. Для начала рассмотрим произвольные десять обычных чисел, пусть их сумма равна s. Тогда числа $s+a$ и $s+b$ не сравнимы ни по модулю 5, ни по модулю 7 (в силу выбора a и b), но при этом каждое из них является суммой 11 чисел, значит по условию делится на 5 или 7. Получаем два варианта: $s + a$ делится на 5 и $s + b$ делится на 7, либо наоборот. В каждом из случаев у суммы 10 чисел окажется фиксирован остаток как по модулю 5, так и по модулю 7, а значит, фиксирован остаток по модулю 35. Следовательно, существует лишь два варианта остатка суммы десяти чисел по модулю 35. Обозначим эти остатки r и t. Теперь докажем, что обычные числа тоже дают не более двух остатков по модулю 35. Рассмотрим два числа x и y. Существуют две десятки, отличающиеся только этими числами. Рассматривая разность их сумм, получаем, что выполняется одно из сравнений по модулю 35:

$$x - y \equiv 0, \qquad x - y \equiv r - t, \qquad x - y \equiv t - r.$$

Предположим, что у обычных чисел существуют три различных остатка x, y, z. Не умаляя общности, можем считать, что $x - y \equiv r - t$ и $x - z \equiv t - r$. Но тогда $z - y \equiv 2r - 2t$, что не сравнимо по модулю 35 ни с $r - t$, ни с $t - r$, противоречие. Значит, всего остатков два, назовем их x и y.

Шаг 3. Проверим, что какой-то из остатков x и y встречается не более одного раза (либо мы найдем 13 чисел, делящихся на одно из на-

ших простых). Предположим противное: пусть каждый из этих остатков встречается хотя бы два раза. Рассмотрим 11 чисел, исключив из исходного набора числа a, b и два числа с остатком x. Пусть S — их сумма. Заменив одно из чисел с остатком y на число с остатком x, получим 11 чисел с суммой $S - y + x$. Заменив ещё один раз, получим сумму $S - 2y + 2x$. Каждая из этих трех сумм делится на 7 или 5, значит, какие-то две суммы делятся на одно и то же $p \in \{5, 7\}$. Так как p — нечетное простое, в любом случае $x - y$ делится на p. Тогда все три суммы есть $11x$ по модулю p, значит x и y делятся на p, и мы нашли 13 чисел, делящихся на p.

Шаг 4. Покажем, что всегда есть 13 чисел, делящихся на одно из наших простых. Мы уже знаем, что остатки исходного набора чисел по модулю 35 выглядят следующим образом: a, b, x и 12 раз y. Рассмотрим 11 чисел с остатком y, их сумма делится на 5 или 7, пусть для определенности на 5. Тогда y делится на 5. Рассмотрим суммы $10y + a$ и $10y + b$. Они дают разные остатки и по модулю 5, и по модулю 7, значит одно из них кратно 5, другое 7. Так как y кратен 5, получаем что одно из чисел a и b кратно 5. Тем самым, получили $12 + 1 = 13$ чисел, кратных 5. Случай y кратного 7 аналогичен.