МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА–2026»

(математика)

Первый день

Якутск 2026

Сборник содержит задачи XXXIII Международной олимпиады школьников «Туймаада» по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: С. Л. Берлов, А. А. Волкова, А. С. Голованов, К. А. Кноп, К. П. Кохась. Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

© Министерство образования и науки РС(Я), 2026.

Старшая лига

1. В Остазии n городов, связанных двусторонними беспосадочными авиарейсами. От любого города до любого другого можно долететь, сделав не более одной пересадки. Пусть d_k — это количество авиарейсов, выходящих из k-го города. Докажите, что $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 \geqslant n(n-1)$. (*A. Devillers и др.*)

2. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и AC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно так, что середина отрезка B_1C_1 равноудалена от точек B и C. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P и пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках B_2 и C_2 соответственно. На этой окружности выбрана такая точка Q, что $AQ \perp PQ$. Луч QP пересекает отрезок BC в точке R. Докажите, что окружность, проходящая через точки B_2, C_2 и R, проходит через середину отрезка BC.

(*ALEPH/A. Рубан*[1])

3. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a^2+b^2 \leqslant 1$ и $(c^2+d^2)^2+2c^2d^2 \leqslant 1$. Докажите, что

$$a^2c^2 + b^2d^2 + \frac{2}{3}(ad+bc)^2 \leqslant 1.$$ (*A. Куликов*)

4. Султан сообщил двум мудрецам, что завтра он поставит по краю круглого стола $k+4$ бокала, в четырех из них будет налито вино, в k остальных — яд. Отличить одно от другого на вид невозможно. Двое мудрецов должны будут по очереди (первый – второй – первый – второй) выпить четыре бокала. Бокалы наполнят в присутствии первого мудреца, и он будет знать, где яд. Но после этого ему запрещено передавать какую бы то ни было информацию второму мудрецу — второй мудрец будет видеть только то, какие бокалы выпил первый. Сегодня мудрецам позволяется посовещаться о своих действиях. При каком наибольшем k им гарантированно удастся выпить все четыре хороших бокала?

(*K. Кноп*)

Младшая лига

1. Решите в натуральных числах уравнение

$$(m^2+3)^3 = (n^3+7)^2.$$ (*A. Голованов*)

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Точки P и Q — проекции точки L на прямые AB и BC соответственно. Точки X и Y — проекции точек A и C на прямую BL соответственно. Докажите, что прямые PY и QX пересекаются на стороне AC. (*A. Волкова*)

3. Положительные числа a, b, c, удовлетворяют условию $2abc = 1+a+b+c$. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{(b+1)^2} + \frac{b^2}{(c+1)^2} + \frac{c^2}{(a+1)^2} \geqslant 1.$$ (*C. Берлов*)

4. Есть две кучи по 10 монет, в первой куче две фальшивых монеты, во второй одна. Настоящие монеты весят поровну, фальшивые монеты легче настоящих и тоже весят поровну. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти 9 настоящих монет? (*K. Кноп*)

[1]НМИ ALEPH — сообщество авторов задач по олимпиадной математике

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Старшая лига

1. Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, и две вершины соединены ребром, если между соответствующими городами есть авиарейс. Для вершины v_k число d_k^2 — это количество (ориентированных) двухзвенных маршрутов вида uv_kw, где разрешено совпадение $u = w$. Тогда сумма в левой части равна количеству всевозможных (ориентированных) двухзвенных маршрутов вида uvw, где разрешено совпадение $u = w$

Правая часть $n(n-1)$ — это количество упорядоченных пар вершин (u, w). Сопоставим этим парам двухзвенные маршруты по следующему правилу. Если вершины u и w не соседние, то от u к w можно добраться с одной пересадкой в какой-нибудь вершине v, и тогда сопоставим этой паре двухзвенный маршрут uvw. Если же вершины u и w соседние, то сопоставим паре (u, w) маршрут uwu. Очевидно, что разным парам сопоставлены разные маршруты (но, возможно, некоторым маршрутам никакие пары не соответствуют), откуда и следует требуемое неравенство.

2. Напишем теорему Менелая для треугольника ACC_1 и прямой BPB_1:

$$\frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AB}{BC_1} \cdot \frac{C_1P}{PC} = 1.$$

Спроецируем все данные отрезки на прямую BC, отношения при этом сохранятся. Пусть H_a, H_b, H_c и H_p — проекции точек A, B_1, C_1 и P на прямую BC соответственно. Получили соотношение

$$\frac{CH_b}{H_bH_a} \cdot \frac{H_aB}{BH_c} \cdot \frac{H_cH_p}{H_pC} = 1.$$

Отметим точку M — середину стороны BC. Так как середина отрезка B_1C_1 равноудалена от точек B и C, точки H_b и H_C симметричны относительно точки M, значит, $CH_b = BH_c$. Сократим эти множители и перепишем равенство следующим образом:

$$\frac{H_cH_p}{H_pC} = \frac{H_bH_a}{H_aB}.$$

Заметим, что этом отрезки CH_c и BH_b равны и делятся точками H_p и H_a в одинаковом отношении, значит, $BH_a = CH_p$, в частности, точки H_a и H_p симметричны относительно точки M. Пересечем луч H_pP с окружностью (ABC) в точке Q'. В силу симметрии AH_aH_pQ' — прямоугольник, откуда получаем, что $\angle AQ'P = 90^\circ$. Так как точка с таким условием на окружности (ABC) единственна, $Q = Q'$ и, значит, $H_p = R$.

Так как точка M — центр окружности (ABC), точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку B_2C_2. С другой стороны, $\angle CB_2P = \angle CRP = \angle PC_2B = 90^\circ$. Значит, четырехугольники CB_2PR и BC_2PR — вписанные, следовательно,

$$\angle PRB_2 = \angle PCB_2 = \angle C_2CB_2 = \angle B_2BC_2 = \angle PBC_2 = \angle PRC_2,$$

где среднее равенство следует из вписанности четырехугольника CB_2C_2B. Тем самым, прямые RQ и RM суть внутренняя и внешняя биссектрисы угла C_2RB_2 соответственно. Тогда точка M лежит на описанной окружности треугольника B_2RC_2 как точка пересечения серединного перпендикуляра и внешней биссектрисы.

3. Очевидно, можно считать, что в обоих ограничениях стоят равенства. Положим для меньшей громоздкости $c^2 = u$, $d^2 = v$. Тогда

$$u^2 + 4uv + v^2 = 1. \qquad (*)$$

Сделаем также подстановку $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, а потом оценку $A\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha \leqslant \sqrt{A^2 + B^2}$. Тогда функция из левой части оценивается как

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\big((3u+2v)\cos^2\alpha + (2u+3v)\sin^2\alpha + 4\sqrt{uv}\cos\alpha\sin\alpha\big) = \\
&\qquad = \frac{1}{3}\Big(\frac{5u+5v}{2} + \frac{u-v}{2}\cos 2\alpha + 2\sqrt{uv}\sin 2\alpha\Big) \leqslant \\
&\leqslant \frac{5u+5v}{6} + \frac{1}{3}\sqrt{\Big(\frac{u-v}{2}\Big)^2 + 4uv} = \frac{5u+5v}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{u^2+v^2+14uv} = \\
&\qquad = \frac{5(u+v)}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{6-5(u+v)^2},
\end{aligned}$$

где последнее равенство получено по модулю соотношения $(*)$. С помощью производной убеждаемся, что функция $f(t) = 5t + \sqrt{6-5t^2}$ имеет максимум в точке $t = 1$. Это в точности то, чего нам не хватало для завершения доказательства.

4. Ответ: $k = 3$.

Оценка. Пусть всего имеется n бокалов. Тогда существует C_n^4 вариантов расположения хороших бокалов, и во всех случаях действия первого мудреца должны различаться. Первый мудрец выбирает в некотором порядке два бокала, значит, у него имеется всего $n(n-1)$ различных вариантов ходов. Значит, должно быть выполнено неравенство $n(n-1) \geqslant C_n^4$, что неверно при $n \geqslant 8$

Пример. Покажем, что при $k = 3$ мудрецы могут действовать так, что бы гарантированно выпить хорошие бокалы. Всего существует $C_7^3 = 35$ вариантов расстановки бокалов по циклу. Поскольку число 7 простое, при циклическом сдвиге могут перейти в себя только расстановки из 7 хороших или из 7 плохих бокалов, которые мы не рассматриваем. Значит, все расстановки разбиваются на группы по 7, отличающиеся циклическим сдвигом. Выпишем по одному представителю из каждой группы:

$$0001011,\ 0010101,\ 0011010,\ 0011001,\ 0011100,$$

где 0 обозначает бокал с вином, и 1 — бокал с ядом.

Стратегия мудрецов выглядит следующим образом. Первым ходом первый мудрец, зная расстановку, понимает, к какой из 5 групп она относится, и выбирает тот бокал, который в выбранном представителе является первым. Второй берёт следующий по часовой стрелке бокал — это второй бокал представителя. В каждом выбранном цикле первые два бокала хорошие, так что это допустимые ходы. После пары ходов останется одна из пяти возможных последовательностей:

$$01011,\ 10101,\ 11010,\ 11001,\ 11100.$$

Заметим, что в первой последовательности первый бокал хороший, во второй — второй, и так до пятой. Тогда первый берёт тот бокал, номер которого совпадает с номером последовательности, тем самым сообщая второму мудрецу всю необходимую информацию.

Младшая лига

1. Ответ: $m = 1$, $n = 1$

Рассмотрим число $m^2 + 1$. Это натуральное число, куб которого является точным квадратом. Значит, оно само является точным квадратом. Но единственная пара квадратов с разностью 3 — это 1 и 4. Значит, единственное возможное m — это 1, тогда $(n^3 + 7)^2 = (1 + 3)^3 = 64$, получаем, что $n^3 + 7 = 8$, $n = 1$

2. Рассмотрим точку H — основание высоты, опущенной из вершины B. Докажем, что эта точка искомая. Не умаляя общности, считаем, что $BC \leqslant BA$, тогда точка H лежит на отрезке LC, точка Y на отрезке BL, а точка X на продолжении отрезка BL за точку L, точки P и Q лежат на сторонах треугольника.

Так как $\angle BQL = \angle BHL = 90^\circ$, точки B, Q, H, L лежат на одной окружности, значит $\angle CHQ = \angle CBL$. Так как $\angle BXA = \angle BHA = 90^\circ$, точки $BHXA$ лежат на одной окружности, значит, $\angle AHX = \angle ABL$. Получаем, что $\angle CHQ = \angle CBL = \angle AHX = \angle ABL$, где среднее равенство следует из того, что BL — биссектриса. Значит, точки X, H и Q лежат на одной прямой.

Для второй тройки точек доказывается аналогично:

$$\angle LHY = \angle LBC = \angle LBP = \angle LHP,$$

где первое и последнее равенства получены из вписанности $BYHC$ и $BPLH$ соответственно.

3. Воспользуемся неравенством $x^2+y^2+x^2 \geqslant xy+yz+zx$, подставив в качестве переменных выражения из условия. Получим неравенство

$$\frac{a^2}{(b+1)^2}+\frac{b^2}{(c+1)^2}+\frac{c^2}{(a+1)^2} \geqslant \frac{ab}{(b+1)(c+1)}+\frac{bc}{(c+1)(a+1)}+\frac{ca}{(a+1)(b+1)}$$

Приведём правую часть к общему знаменателю, нам достаточно показать, что полученное выражение не меньше 1:

$$\frac{ab(a+1)+bc(b+1)+ca(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \overset{?}{\geqslant} 1$$

Домножим на знаменатель и раскроем все скобки. Так как все числа положительны, полученное неравенство будет равносильно исходному.

$$a^2b+ab+b^2c+bc+c^2a+ca \overset{?}{\geqslant} abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$$

Сократим совпадающие мономы и применим условие: заменим $a+b+c+1$ на $2abc$. Получим неравенство

$$a^2b+b^2c+c^2a \overset{?}{\geqslant} 3abc,$$

которое верно в силу неравенства о средних.

4. Будем помечать буквой A монеты из первой кучи, B — из второй. Для первого взвешивания разобьём кучки следующим образом:

$$10A = 3A+7A, \qquad 10B = 4B+6B.$$

Первое взвешивание: $\boxed{3A + 4B \vee 7A}$.

Ветвь $>$. Если левая чаша тяжелее, то в $3A$ нет фальшивых монет: иначе слева была бы хотя бы одна фальшивая монета, а справа — не более одной. Значит, все монеты $3A$ настоящие. Вторым взвешиванием найдём в кучке $10B$ не менее 6 настоящих монет: разделим $10B = 3B + 3B' + 4B$ и взвесим

$$\boxed{3B \vee 3B'}$$

Если это взвешивание дает «$>$», то фальшивая монета в $3B'$, и получили $3A + 3B + 4B$ — 10 настоящих монет. Случай «$<$» аналогичен.

Если это взвешивание дает «$=$», то фальшивая монета в $4B$, и настоящие $3A + 3B + 3B'$ — 9 монет.

Ветвь $=$. Равенство возможно только в ситуации: $3A$ содержит одну фальшивую монету, $7A$ содержит одну фальшивую, $4B$ весь настоящий, а $6B$ содержит одну фальшивую. Здесь можно игнорировать наименьшую группу $3A$ и вторым взвешиывнием найти ещё 5 настоящих монет. Сделать это можно так. Из $7A$ выделим $2A$ и $5A$, а из $6B$ — две тройки $3B$ и $3B'$. Выполним взвешивание

$$\boxed{2A + 3B' \vee 5A}.$$

Если это взвешивание даёт результат «$<$», то группа $5A$ точно настоящая; вместе с настоящей группой $4B$ получаем 9 настоящих монет. Если оно даёт «$=$», то настоящими будут $2A$, $3B$ и $4B$, снова 9 монет. Если же оно даёт «$>$», то настоящие $2A$ и другая тройка $3B'$, то есть снова 9 монет.

Ветвь $<$. Возможны ровно три типа распределения фальшивых монет по группам $3A, 7A, 4B, 6B$: $(1, 1, 1, 0)$, $(2, 0, 0, 1)$, $(2, 0, 1, 0)$. Из $7A$ выделим $4A$ и $3A'$, а из $6B$ — $5B$ и $1B$. Выполним взвешивание

$$\boxed{4A + 4B \vee 3A' + 5B}.$$

Если это взвешивание даёт «$<$», то настоящие монеты — это $3A'$ и $6B$, всего 9 монет. Если оно даёт «$=$», то настоящие монеты $4A$ и $5B$, опять 9 монет. Если оно даёт «$>$», то настоящие — $7A$ $4B$ и оставшаяся монета $1B$, всего 12. В любом исходе не менее 9 настоящих монет.