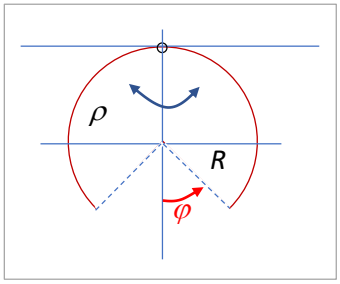
Экспериментальная задача 1. К*олебания обруча*

Младшая лига



Обруч, подвешенный на гвоздь (ось), может совершать колебания. Если в нижней части обруча отрезать симметричный сектор (смотри рисунок) возможность колебаний остаётся. Зависимость периода таких малых колебаний от параметров системы (R - радиуса обруча, g - ускорения свободного падения, φ - величины угла выреза) можно описать формулой

$$T = C \cdot R^{\alpha} \cdot g^{\beta} \cdot \varphi^{\gamma}$$

В данной задаче нужно экспериментально определить параметры (C, α, β, γ) этой зависимости. Известно, что эти параметры могут быть или целыми числами, или обыкновенными дробями.

Дополнительным вопросом в задаче является теоретическое обоснование экспериментальных результатов.

Оборудование: картонный обруч с проколом для оси колебаний, игла (для изготовления оси колебаний), штатив с опорой для оси колебаний (канцелярский зажим), линейка, циркуль, секундомер, ножницы, лист миллиметровой бумаги для построения графика.

Схема подвеса обруча показана на фотографии

Выполнение задания должно соответствовать следующей схеме.

1. Разметка обруча. Обруч (используя линейку и циркуль) следует разделить радиальными метками на 36 частей. В этом случае угловое расстояние между смежными метка будет соответствовать 10°. Точка прокола для оси колебаний должна находиться на одной из меток.
2. Измерить период колебаний полного обруча. Измерения провести 3-5 раз и усреднить. Все измерения заносятся в экспериментальную таблицу. Период колебаний определять по большому числу колебаний (30-50).
3. Вырезать симметричный относительно оси подвеса сектор в 20°. Измерить период колебаний.
4. Последовательно увеличивать сектор выреза и измерять период колебаний. Максимальный угол выреза 200°.
5. Построить график зависимости периода колебаний обруча от угла выреза.
6. По виду графика $T(\varphi)$ определите значение параметра γ.
7. Методом размерности определите значения остальных параметров (α, β).

Возможный вариант решения

Данное оборудование позволяет исследовать только зависимость периода колебаний от величины угла вырезанного сектора. Схема такого исследования может быть следующей. При помощи линейки делим обруч на чётное число частей (16-20). Для этого измеряем средний диаметр обруча. Вычисляем длину окружности. Делим эту величину на запланированное число частей. Отмечаем на обруче симметричные точки выреза от верхней точки обруча в которую вставляется (вкалывается) ось колебаний. Измеряем период колебаний полного обруча. Делаем первый симметричный вырез (отрезаем по одной части слева и справа в нижней части обруча). Вновь измеряем период колебаний. Повторяем измерения постепенно увеличивая сектор выреза. По измеренным периодам колебаний убеждаемся, что он не зависит от величины сектора выреза. Это позволяет сделать вывод, что параметр $\gamma = 0$.

Значения параметров α и β определяем методом размерности. В соответствии с формулой

$$T = C \cdot R^{\alpha} \cdot g^{\beta} \cdot \varphi^{\gamma} = C \cdot R^{\alpha} \cdot g^{\beta}$$

Записываем соответствующее уравнение размерности

$$T = L^{\alpha} \cdot \frac{L^{\beta}}{T^{2\beta}}$$

Отсюда

$$1 = -2\beta \;\rightarrow\; \beta = -\frac{1}{2}$$

$$0 = \alpha + \beta \;\rightarrow\; \alpha = -\beta = \frac{1}{2}$$

В итоге формула периода колебаний выглядит следующим образом (похожа на формулу периода колебаний математического маятника)

$$T = C \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}$$

Пример экспериментальных данных

Эксперимент с картонным кругом
Диаметр (внешний) 25 см, внутренный 23
средний радиус 11,5 см
Ось игла

$i := 0..6$

$$\varphi_i := \frac{360}{18}\cdot((18 - 2\cdot i))$$

число колебаний при измерении периода колебаний 20

$$t20 := \begin{pmatrix} 19.86 \\ 19.82 \\ 19.80 \\ 19.88 \\ 19.86 \\ 19.89 \\ 19.95 \end{pmatrix} \qquad T := \frac{\overrightarrow{t20}}{20} = \begin{pmatrix} 0.993 \\ 0.991 \\ 0.99 \\ 0.994 \\ 0.993 \\ 0.995 \\ 0.997 \end{pmatrix}$$

Теория T = 0,983

По среднему периоду колебаний вычисляем величину константы *C*

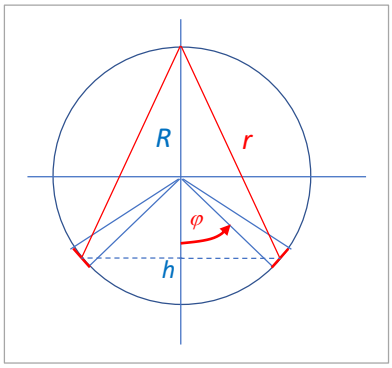
$$C = 0{,}993\sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}115}} \approx 9{,}17$$

Теоретическое значение константы

$$C = 2\pi\sqrt{2} \approx 8{,}89$$

Теория колебаний обруча с вырезанным сектором. Независимость периода колебаний от величины вырезанного сектора может быть доказана следующим образом.

Рассмотрим колебания системы двух небольших одинаковых кусочков обруча, расположенных симметрично относительно вертикальной оси симметрии обруча (смотри рисунок, будем считать, что остальная часть обруча не имеет массы).



Определим кинетическую и потенциальную энергии системы в некоторый момент времени в режиме колебаний, когда система отклонена на небольшой угол α, и имеет угловую скорость вращения $\dot{\alpha}$.

Кинетическая энергия этих двух масс при колебании

$$T = 2m\frac{(2R\cdot cos(\varphi/2)\cdot\dot{\alpha})^2}{2} = 2m\big(2R\cdot cos(\varphi/2)\big)^2\cdot\frac{\dot{\alpha}^2}{2}$$

Отсюда получаем коэффициент инерционности системы

$$j = 2m\big(2R\cdot cos(\varphi/2)\big)^2$$

Центр масс системы

$$h = 2R\cdot\big(cos(\varphi/2)\big)^2$$

Изменение потенциальной энергии (гравитационной) при отклонении системы на небольшой угол α

$$\Delta U = 2mg\cdot 2R\cdot\big(cos(\varphi/2)\big)^2\cdot\frac{\alpha^2}{2}$$

Отсюда получаем коэффициент упругости системы

$$k = 2mg\cdot 2R\cdot\big(cos(\varphi/2)\big)^2$$

Теперь всё просто, период малых колебаний с известными параметрами (j, k) определяется формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{j}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m\big(2R\cdot cos(\varphi/2)\big)^2}{2mg\cdot 2R\cdot\big(cos(\varphi/2)\big)^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

Замечательный результат! Период колебаний симметричной системы двух масс не зависит от геометрии расположения этих масс на кольце. Все симметричные пары колеблются синхронно и период колебаний не зависит от величины заполнения кольца (или от величины симметричного «выреза»). Полученная формула практически совпадает с формулой периода колебаний математического маятника (длина маятника равна диаметру кольца).

Критерии оценивания соответствуют схеме выполнения задания.

1. Разметка - 2 балла
2. Измерения периода – 7 баллов
3. Построение графика – 2 балла
4. Значение $\gamma = 0$ (по анализу графика) – 1 балла
5. Определение α, β методом размерности - 3 баллов
6. Теория колебаний – дополнительные – 5 баллов

Экспериментальная задача 2. Механический «чёрный» ящик

Младшая лига

Оборудование: «чёрный» ящик, весы электронные, линейка ученическая, гайки 15 шт., отрезок железной проволоки, лист миллиметровой бумаги, плоскогубцы.

Задание: с помощью предложенного Вам оборудования предложите способ определения внутреннего устройства «чёрного» ящика, определите конкретные физические характеристики частей этого устройства и выполните оценку погрешности.

Возможное решение

Прежде всего необходимо из отрезка железной проволоки и одной из гаек изготовить кронштейн для подвешивания остальных гаек к крючку, выступающему из «черного» ящика. Далее можно приступать к измерениям.

1. Необходимо взвесить на электронных весах все гайки и установить средний допуск их изготовления. Установленный средний допуск впоследствии можно будет учесть при определении абсолютной погрешности измерений массы. Результаты измерений можно представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

№	m, г	$m_{ср}$, г	$\lvert\Delta m_д\rvert$, г	$\Delta m_{ср}$, г
1	29,25	29,11	0,14	0,07
2	28,99		0,12	
3	29,24		0,13	
4	29,24		0,13	
5	29,09		0,02	
6	29,09		0,02	
7	29,00		0,11	
8	29,11		0,00	
9	29,11		0,00	

10	29,11		0,00	
11	29,03		0,08	
12	29,03		0,08	
13	28,98		0,13	
14	29,12		0,01	
15	29,21		0,10	

2. Приступить к определению зависимости длины выступающего из торца «чёрного» ящика крючка от количества подвешиваемых к нему гаек. С учётом того, что в каждом измерении сила тяжести уравновешивается возникающей силой упругости, результаты измерений можно представить в виде таблицы 2.

Таблица 2

N	m, г	$F_{упр}$, Н	y, мм
0	-	-	5
1	29,11	0,3	11
2	58,22	0,6	17
3	87,33	0,9	24
4	116,44	1,2	30
5	145,55	1,5	37
6	174,66	1,7	43
7	203,77	2,0	50
8	232,88	2,3	57
9	261,99	2,6	59
10	291,10	2,9	62
11	320,21	3,2	64
12	349,32	3,5	66
13	378,43	3,8	68
14	407,54	4,1	70

3. На основе полученных данных построить график зависимости $F_{\text{упр}}(y)$, который примерно должен выглядеть как на рисунке 1.

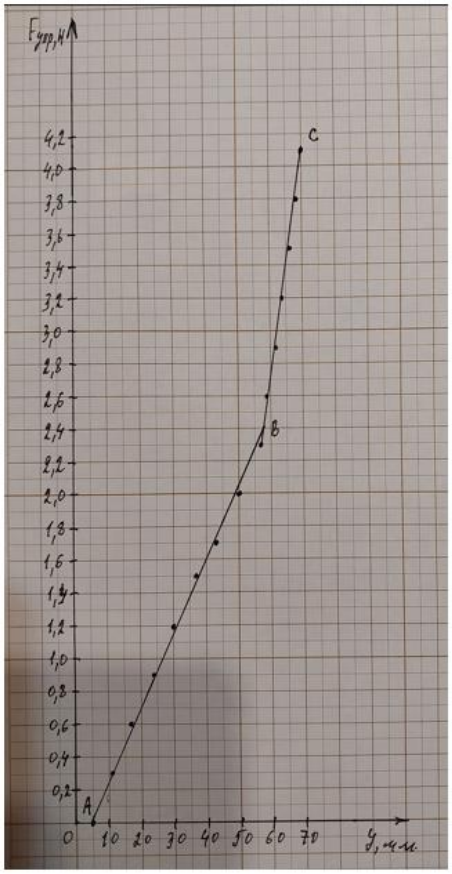


Рис. 1

4. Вычислим коэффициенты жесткости k_1 и k_2 на участках АВ и ВС графика, соответственно:

$$k_1 = \frac{\Delta F_{\text{упр1}}}{\Delta y_1} = \frac{2{,}4\ \text{Н}}{0{,}053\ \text{м}} \approx 45\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

$$k_2 = \frac{\Delta F_{\text{упр2}}}{\Delta y_2} = \frac{1{,}9\ \text{Н}}{0{,}012\ \text{м}} \approx 158\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

5. Варианты объяснения полученных результатов:
а) внутрь пружины вставлен отрезок резинового шнура, длина которого больше длины пружины; резина начинает растягиваться только после того, как длина растянутой пружины станет равной длине недеформированного отрезка резинового шнура (участок ВС на линии графика);
б) внутри пружины большей длины вставлена пружина меньшей длины с нитью, другой конец которой привязан к верхнему концу наружной пружины. Нижние концы пружин прикреплены к концу крючка внутри ящика. Вставленная пружина начинает растягиваться только после натяжения нити. Увеличение жесткости на участке ВС объясняется тем, что на этом участке происходит удлинение резины, вставленной внутрь пружины, а на участке АВ резина находится в недеформированном состоянии. Тогда жесткости пружины и резины соответственно будут равны $k_{\text{пр}} = k_1 \approx 45$ Н/м и $k_{\text{р}} = k_2 - k_1 \approx 113$ Н/м.
6. Погрешность эксперимента определяется погрешностью измерения массы гаек, равной сумме абсолютных погрешностей измерения весами $\Delta m_{\text{инстр}}$ и среднего допуска $\Delta m_{\text{ср}}$ изготовления гаек:

$$\Delta m = \Delta m_{\text{ср}} + \Delta m_{\text{инстр}} = 0{,}07\ \text{г} + 0{,}01\ \text{г} = 0{,}08\ \text{г}$$

и погрешностью Δy измерения выступающей части крючка, равной сумме абсолютной инструментальной погрешности $\Delta y_{\text{инстр}}$ и погрешности отсчёта $\Delta y_{\text{отс}}$:

$$\Delta y = \Delta y_{\text{инстр}} + \Delta y_{\text{отс}} = 1\ \text{мм} + 0{,}5\ \text{мм} = 1{,}5\ \text{мм}.$$

Относительная погрешность определения жёсткости:

$$\varepsilon_k = \frac{\Delta m}{m_{\text{ср}}} + \frac{\Delta y}{y_1} = \frac{0{,}08}{29{,}11} + \frac{1{,}5}{11} = 0{,}003 + 0{,}136 = 0{,}139\ (14\%).$$

Абсолютные погрешности жёсткости пружины и резины равны:

$$\Delta k_{\text{пр}} = \varepsilon_k \cdot k_{\text{пр}} = 0{,}139 \cdot 45 \text{ Н/м} \approx 6 \text{ Н/м},$$
$$\Delta k_{\text{р}} = \varepsilon_k \cdot k_{\text{р}} = 0{,}139 \cdot 113 \text{ Н/м} \approx 16 \text{ Н/м}$$

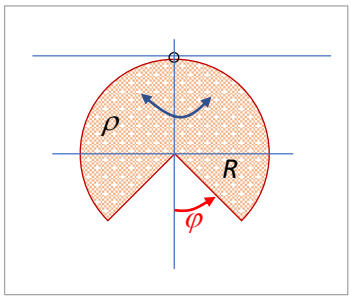
Примерные критерии оценивания:

1. Измерены массы всех гаек по отдельности……1 балл
2. Определен средний допуск изготовления гаек……1 балл
3. Установлена зависимость удлинения от массы гаек:
   а) 5-7 измерений……1 балл
   б) 8-10 измерений……...2 балла
   в) 11 и более измерений……3 балла
4. Построен график зависимости $F_{\text{упр}}(y)$……...2 балла
5. На графике четко получены участки АВ и ВС……1 балл
6. Вычислены жёсткости k_1 и k_2……2 балла
7. Правильно объяснено изменение жесткости (пружина+резина или пружина большей длины+ пружина меньшей длины с ниткой)……4 балла
8. Вычислены жёсткости пружины и резины……...2 балла
9. Рассчитана погрешность эксперимента:
   а) в погрешности измерения массы не учтен средний допуск изготовления гаек…….. 0,5 баллов
   б) в погрешности измерения массы учтен средний допуск изготовления гаек……...1 балл
10. Вычислены относительная и абсолютная погрешности эксперимента……3 балла

Итого 20 баллов

Старшая лига

Экспериментальная задача 1. *Первый замечательный предел «в законе»*

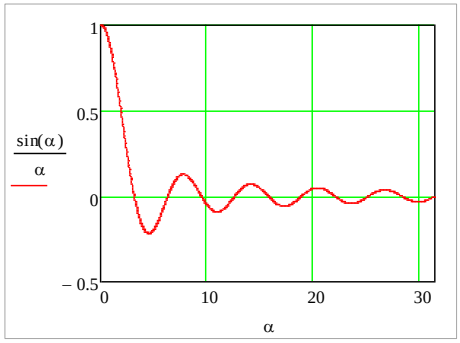


Не очень сложная теория приводит к интересной формуле зависимости периода малых колебаний диска с секторным вырезом (смотри рисунок). Эту зависимость (квадрат периода) можно представить через функцию *замечательного предела*

$$T^2 = C \cdot \frac{1-a\frac{sin(\alpha)}{\alpha}}{1-b\frac{sin(\alpha)}{\alpha}} \qquad (1)$$

Здесь $\alpha = \pi - \varphi$ – половинный угол диска, C, a, b – константы.

Функция $f(\alpha) = sin(\alpha)/\alpha$ называется первым замечательным пределом. График этой функции представлен на рисунке. Очевидно, что при $\alpha \to 0$, значение функции будет стремиться к 1 (смотри рисунок).



В задаче требуется экспериментально доказать справедливость формулы (1) и определить константы C, a, b.

Оборудование: картонный диск с отметкой прокола для оси колебаний, штатив с крепёжным оборудованием, линейка, циркуль, ножницы, секундомер, 2 листа миллиметровой бумаги для построения графиков.

Рекомендуемая схема выполнения задания.

1. Разметка диска. Диск (используя линейку и циркуль) следует разделить на 36 частей (секторов). В этом случае один сектор будет соответствовать углу в 10°.

2. Собрать экспериментальную установку, подвесить диск по схеме маятника (в соответствии с фотографией узла подвески). Проверить возможность «хорошего» измерения периода малых колебаний (диск должен совершать не менее 20 колебаний без значительного уменьшения амплитуды).
3. Провести измерение периода колебаний полного диска. Получить значение константы C.
4. Далее повторить измерения периода колебаний диска с вырезанным сектором. При каждом последующем измерении вырезанный сектор увеличивается (следует использовать постоянный «шаг» увеличения

сектора). Число экспериментальных «точек» должно быть порядка 10 и предельный угол выреза должен быть порядка 200°. В экспериментальную таблицу записываются величина угла выреза и время колебаний.

5. По величине углов выреза вычисляется колонка значений первого замечательного предела (именно эта величина входит в формулу периода колебаний).
6. Преобразовать формулу (1) к линейной форме (определить соответствующие координаты линейной формы).
7. Построить график экспериментальных данных в линейной форме. Аппроксимировать график прямой линией. Хорошая аппроксимация экспериментальных точек в новых (линейных) координатах прямой линией является доказательством справедливости формулы (1).
8. По параметрам прямой линии определить значения коэффициентов a и b формулы (1).

Пример решения.

Очевидно, что $C = {T_0}^2$ – квадрат периода колебаний полного диска ($\alpha = \pi$). Далее преобразуем формулу к линейной форме

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = 1 - \frac{(a-b)z}{1-bz}; z = \frac{sin(\alpha)}{\alpha}$$

$$1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \frac{(a-b)z}{1-bz} \quad \rightarrow \quad t = \frac{(a-b)z}{1-bz} \quad \rightarrow \quad \frac{z}{t} = \frac{1}{a-b} - \frac{b}{a-b}z$$

Видим, что в новых переменных $(z, z/t)$ зависимость становится линейной.

Пример экспериментальных данных с картонным диском радиуса 15,7 см. Число колебаний при определении периода равно 20. Шаг по углу выреза 10°. Полный угол выреза 120°.

$\varphi := \varphi \cdot \frac{\pi}{180} =$

	0
0	0
1	0.175
2	0.349
3	0.524
4	0.698
5	0.873
6	1.047
7	1.222
8	1.396
9	1.571
10	1.745

$t :=$

19.50	19.47	19.35	19.41	19.44
19.24	19.37	19.35	19.32	19.29
19.13	19.12	19.18	19.22	19.11
18.94	18.97	19.04	18.99	18.98
18.74	18.74	18.76	18.78	18.74
18.56	18.52	18.52	18.43	18.57
18.21	18.16	18.11	18.24	18.17
17.82	17.79	17.81	17.83	17.80
17.44	17.42	17.43	17.33	17.48
16.87	16.82	16.88	16.83	16.80
16.19	16.18	16.22	16.21	16.18

$T =$

	0
0	0.972
1	0.966
2	0.958
3	0.949
4	0.938
5	0.926
6	0.909
7	0.89
8	0.871
9	0.842
10	0.81

$\alpha := \pi - \varphi =$

	0
0	3.142
1	2.967
2	2.793
3	2.618
4	2.443
5	2.269
6	2.094
7	1.92
8	1.745
9	1.571
10	1.396

$z := \overrightarrow{\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}} =$

	0
0	0
1	0.059
2	0.122
3	0.191
4	0.263
5	0.338
6	0.413
7	0.489
8	0.564
9	0.637
10	0.705

$t := \overrightarrow{\left[1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right]} =$

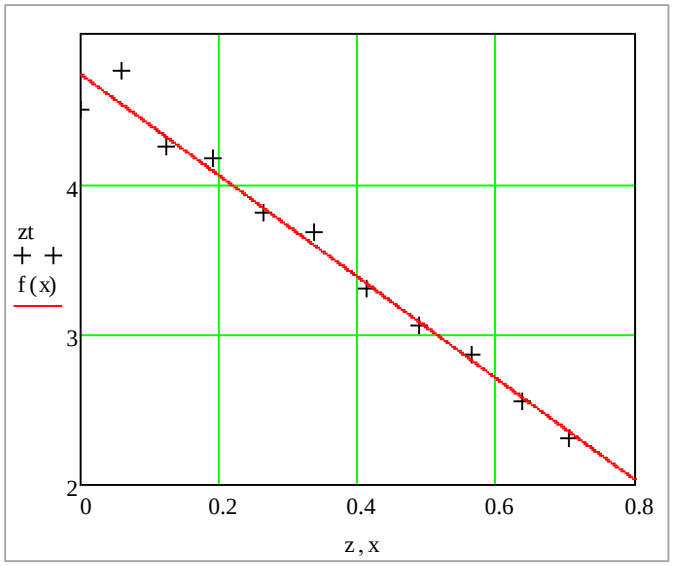
	0
0	0
1	0.012
2	0.029
3	0.046
4	0.069
5	0.092
6	0.125
7	0.16
8	0.197
9	0.249
10	0.305

$zt =$

	0
0	4.5
1	4.753
2	4.251
3	4.172
4	3.815
5	3.676
6	3.306
7	3.056
8	2.871
9	2.555
10	2.309

График в линейных координатах

МКТ даёт для коэффициентов значения:



$$a = 0{,}925; b = 0{,}713$$

Теоретические значения: $a = 8/9 = 0{,}889 \approx 0{,}9; b = 2/3 = 0{,}667 \approx 0{,}7$

Согласие с теорией можно признать хорошим.

Критерий оценивания экспериментальной задачи с диском №1, старшая лига

№	Критерий	Балл
1	Разметка диска	2
2	Серия измерений периодов колебаний	7
3	Вычисление значений первого замечательного предела	3
4	Преобразование формулы (1) к линейной форме	3
5	Построение линейного графика	2
6	Определение параметров	3
	Всего:	20

Критерии оценивания соответствуют схеме выполнения задания.

1. Разметка диска – 2 балла
2. Измерения периода колебаний (получение значения константы C по периоду колебаний полного диска) – 7 баллов
3. Вычисление значений первого замечательного предела – 3 балла
4. Преобразование формула периода колебаний к линейной форме – 3 балла
5. Построение графика в линейных координатах – 2 балла
6. Вычисление параметров – 3 балла

Полная сумма баллов – 20.

Экспериментальная задача 2. RC-цепь

Старшая лига

Оборудование и принадлежности: стрелочный амперметр, регулируемый источник напряжения, генератор низкочастотных сигналов, двухканальный осциллограф, секундомер, макетная плата, резистор, 2 конденсатора различной ёмкости, ключ, соединительные провода, два листа миллиметровки.

Осциллограф – это измерительный прибор, предназначенный для визуализации и анализа электрических сигналов. Он отображает форму сигнала в виде графика, показывающего, как изменяется сигнал во времени (осциллограммы). Это позволяет наглядно исследовать такие параметры, как амплитуда, частота, длительность импульсов, фазовый сдвиг и другие параметры.

Генератор низких частот (ГНЧ) вырабатывает синусоидальные сигналы $U=U_m \sin\omega t$, где U_m – амплитуда сигнала, ω – угловая (циклическая) частота.

Принцип работы ключа – при нажатии кнопки происходит подключение центрального вывода (на одной стороне ключа) к одному из крайних. Другие выводы ключа в данной работе не используются.

Класс точности прибора - это погрешность, в процентах от наибольшего значения измеряемой величины.

Задание

1. Используя источник напряжения и амперметр, определить сопротивление резистора. **Изменяя напряжение на регулируемом источнике избегать зашкаливания на амперметре!** Классы точности миллиамперметра и вольтметра равны 2,5.
2. Оценить погрешность измерения сопротивления резистора.
3. Собрать схему, представленную на рисунке 1 с конденсатором C_1. Используя данную цепь, определить ёмкость конденсатора. **Для работы использовать вход на 6 мА для миллиамперметра! Не подавать напряжение больше 20 В!**

4. Отключите RC-цепь от источника напряжения. Замените конденсатор C_1 на C_2. Подключите на вход цепи (вместо источника напряжения) ГНЧ. Также подсоедините первый канал осциллографа на вход цепи, второй канал – на выводы конденсатора (выход цепи). С помощью осциллографа определите отношения напряжений на конденсаторе ($U_{вых}$) ко входному сигналу ($U_{вх}$) и найдите её зависимость от частоты. Постройте график этой зависимости до уменьшения значения $K=U_{вых}/U_{вх}\approx 0,3$.
5. Определите ёмкость второго конденсатора C_2.

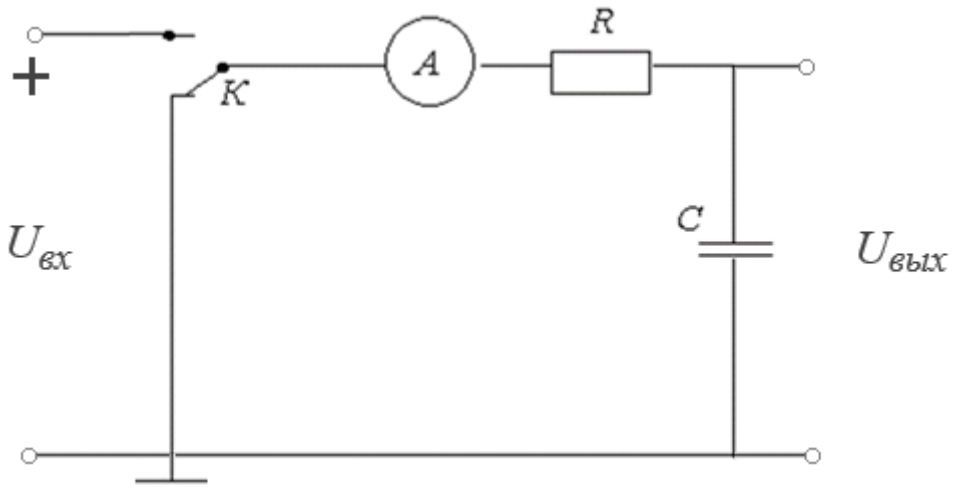


Рис. 1.

Возможное решение

1. Выставляем на источнике питания напряжение так, чтобы получить максимальное отклонение на стрелке миллиамперметра. Отклонение на 6 мА достигается при напряжении 16 В. Из закона Ома находим:

$$R=U/I = 16,5/6\cdot 10^{-3} \approx 2,75 \text{ кОм}$$

Далее делаем аналогичные измерения при других напряжениях и результаты заносим в таблицу 1.

Таблица 1.

U, В	16,5	13,5	11	8	5,5
I, mA	6,0	5,0	4,0	3,0	2,0
R, кОм	2,75	2,70	2,75	2,67	2,75
$R_{ср}$, кОм	2,72				

2. Инструментальную погрешность приборов определяем из класса точности. При пределе измерения прибора 30 В это будет:

$$\Delta U_{\text{инст}} = \frac{m \cdot U_{max}}{100} = 0{,}75\ B$$

Аналогично для миллиамперметра:

$$\Delta I_{\text{инст}} = \frac{m \cdot I_{max}}{100} = 0{,}15\ мA$$

Ошибку отсчетов берем равной половине цены деления прибора: $\Delta U_{отсч}$ = 0,5 В, $\Delta I_{отсч}$ = 0,2 мА.
Общая погрешность систематических погрешностей будет:

$$\Delta U_{сист} = \Delta U_{инст} + \Delta U_{отсч} = 1{,}25\ В$$

$$\Delta I_{сист} = \Delta I_{инст} + \Delta I_{отсч} = 0{,}35\ мА$$

Находим погрешность сопротивления:

$$\Delta R = R\left(\frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}\right) = 2{,}72\left(\frac{1{,}25}{16{,}50} + \frac{0{,}35}{6}\right) = 0{,}36\ кОм$$

Тогда сопротивление резистора будет:

$$R\ = (2{,}72\ \pm\ 0{,}36)\ кОм$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\Delta R}{R} \cdot 100\% \approx 13{,}4\ \%$$

3. Из закона Ома, для цепи, представленной на рисунке 1, при разрядке конденсатора в результате отключения источника напряжения, записываем:

$$IR + U_C = 0 \qquad (0)$$

Из определения силы тока и подстановки напряжения на конденсаторе имеем:

$$R\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C} \qquad (1)$$

Решая полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$$

Проинтегрируем и находим:

$$\ln\left(\frac{q}{q_0}\right) = -\frac{t}{RC}$$

где q_0 – начальный заряд на конденсаторе. Откуда следует

$$q = q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (3)$$

Из определения силы тока:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4)$$

где $I_0 = q_0/RC$,

Из выражения (4) следует:

$$ln\frac{I}{I_0} = -\frac{t}{RC} \text{ или } ln\frac{I_0}{I} = \frac{t}{RC} \quad (5)$$

При условии, что логарифм в выражении (5) равен единице, получаем

$$t = RC$$

Из этого выражения можем найти ёмкость:

$$\mathrm{C} = t_0/R \quad (6)$$

Для экспериментального определения ёмкости измеряем зависимость изменения силы тока от времени при разрядке конденсатора. Значения записываем в виде таблицы 2.

Таблица 2.

t,c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	13	15	17	20
I, mA	6	5	4,2	3,6	3,2	2,8	2,4	2,2	1,9	1,7	1,6	1,0	0,8	0,5	0,4
I_0/I	1	1,20	1,43	1,67	1,88	2,14	2,50	2,73	3,16	3,53	4,29	6,00	7,50	10,00	15,00
$Ln(I_0/I)$	0	0,18	0,36	0,51	0,63	0,72	0,92	1,00	1,15	1,26	1,46	1,79	2,01	2,30	2,70

Строим график, представленный на рисунке 2.

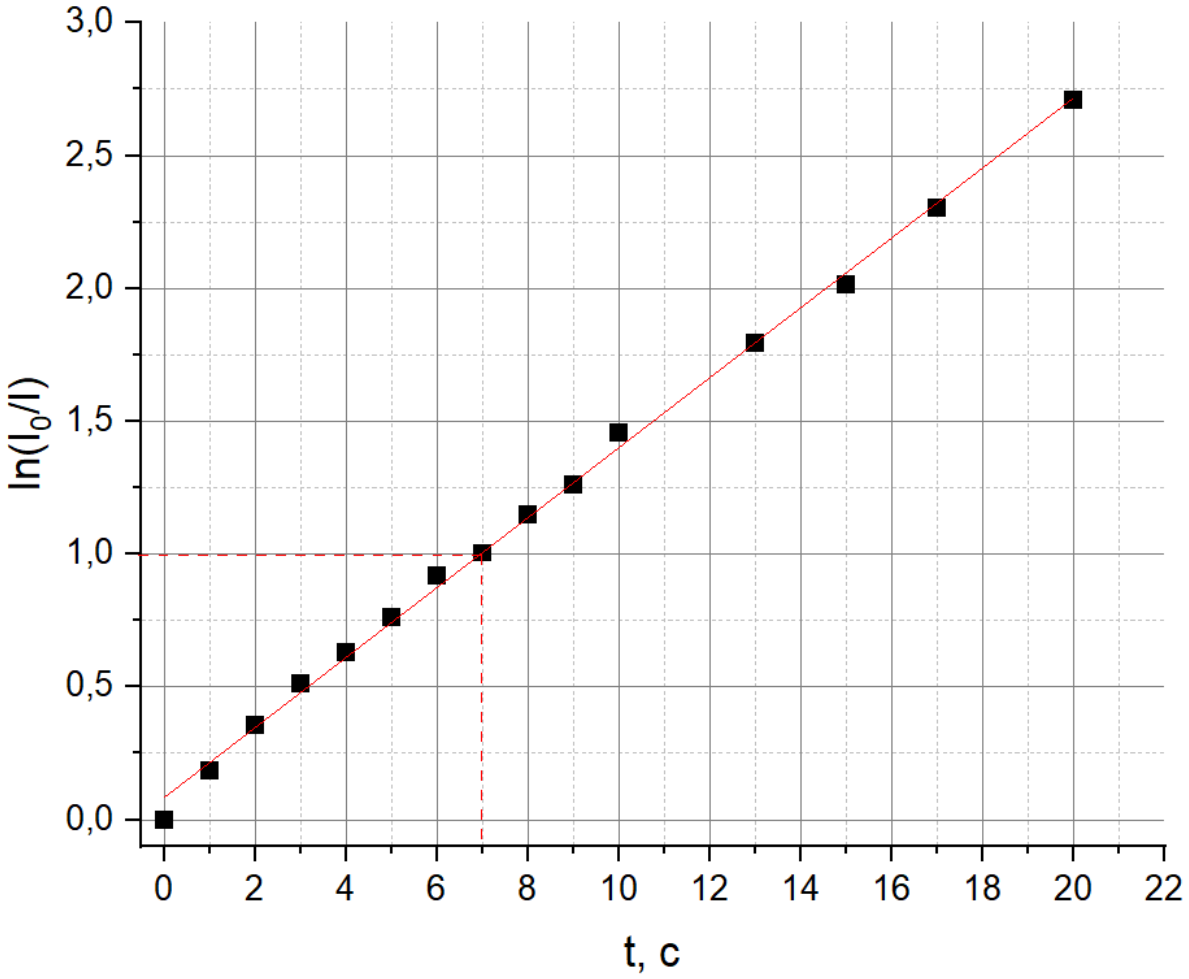


Рис.2

Время t_0 при $ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = 1$, находим из графика на рисунке 2. Соответствующее время равно 7 с и находим искомое значение ёмкости первого конденсатора:

$$C \approx 2{,}57 \text{ мФ}$$

4. Найденные с помощью осциллографа значения напряжений на входе и выходе цепи, заносим в таблицу 2.

Таблица 2.

f, Гц	1,3	3	5	10	20	30,5	40,2	50	60	70	81	90	100
$U_{вх}$, В	1,06	1,62	2,14	2,46	2,50	2,36	2,32	2,28	2,26	2,26	2,26	2,28	2,26
$U_{вых}$, В	1,04	1,56	2,04	2,26	1,96	1,64	1,40	1,16	1,08	0,96	0,84	0,80	0,72
$U_{вых}/U_{вх}$	0,98	0,96	0,95	0,90	0,83	0,70	0,61	0,51	0,48	0,42	0,37	0,35	0,32

Используя эти значения, строим график, показанный на рисунке 3.

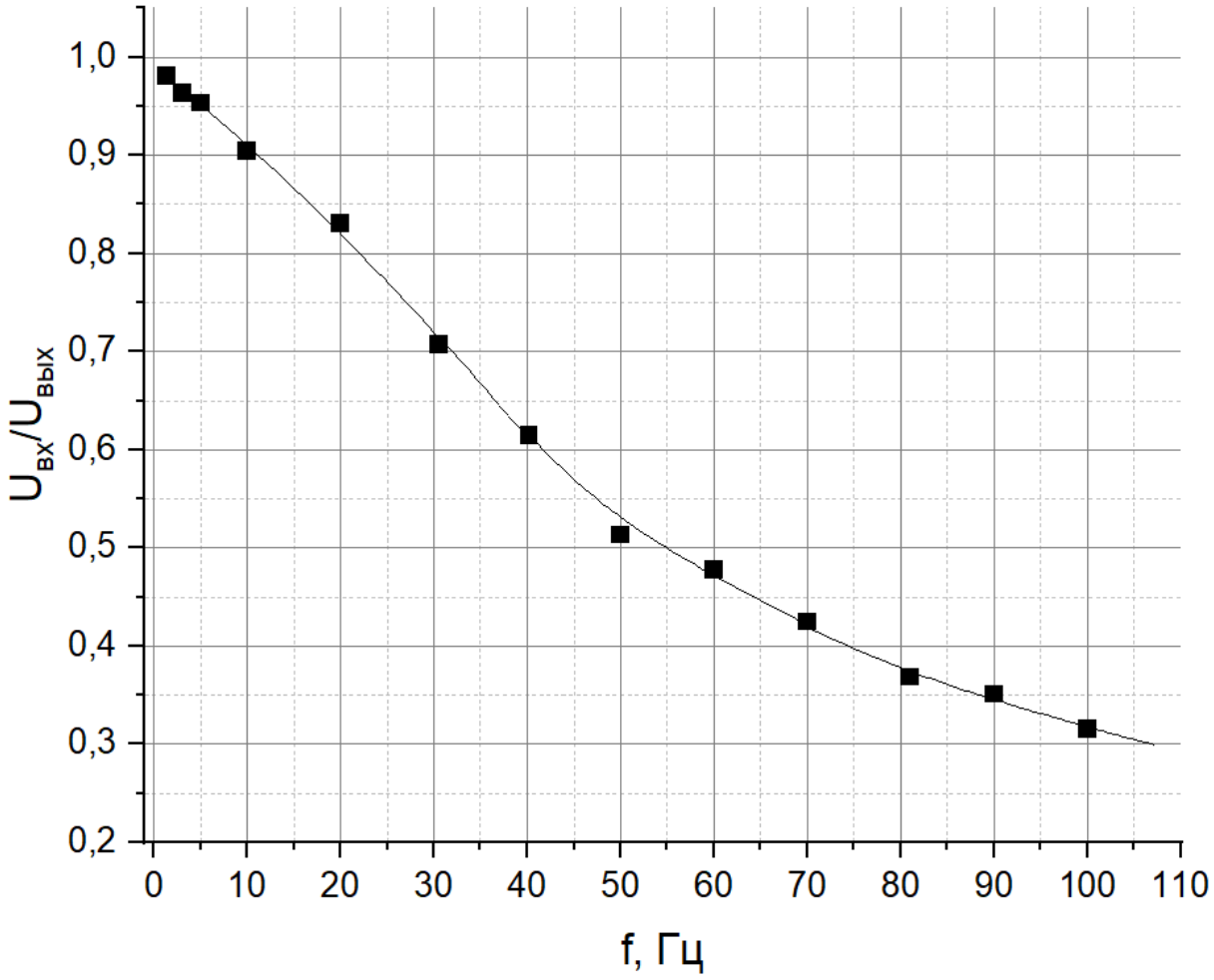


Рис.3

5. Запишем выражения для входного напряжения:

$$U_{вх} = U_R + U_C = IZ \qquad (7)$$

где $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ – полное сопротивление цепи, $X_C = \frac{1}{\omega C_2}$ – реактивное сопротивление конденсатора, $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота, C_2 – ёмкость второго конденсатора. Выходное напряжение снимается с конденсатора, поэтому

$$U_{вых} = IX_C = \frac{I}{\omega C_2}$$

Тогда

$$K = \frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{1/\omega C_2}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C_2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega C_2 R)^2 + 1}} \qquad (8)$$

При равенстве сопротивлений $R = \frac{1}{\omega C_2}$ выражение под корнем в (8) равно 2. В этом случае получим $K = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$. Из графика 3 находим соответствующее данному значению граничную частоту $f_{гр} \approx 30$ Гц. Из формулы для ёмкостного сопротивления находим:

$$C_2 = \frac{1}{\omega \cdot R} \approx 2 \text{ мкФ}$$

Возможное решение

6. Выставляем на источнике питания напряжение так, чтобы получить максимальное отклонение на стрелке миллиамперметра. Отклонение на 6 мА достигается при напряжении 16 В. Из закона Ома находим:

$$R=U/I = 16{,}5/6 \cdot 10^{-3} \approx 2{,}75 \text{ кОм}$$

Далее делаем аналогичные измерения при других напряжениях и результаты заносим в таблицу 1.

Таблица 1.

U, В	16,5	13,5	11	8	5,5
I, mA	6,0	5,0	4,0	3,0	2,0
R, кОм	2,75	2,70	2,75	2,67	2,75
$R_{ср}$, кОм	2,72				

7. Инструментальную погрешность приборов определяем из класса точности. При пределе измерения прибора 30 В это будет:

$$\Delta U_{\text{инст}} = \frac{m \cdot U_{max}}{100} = 0{,}75\ B$$

Аналогично для миллиамперметра:

$$\Delta I_{\text{инст}} = \frac{m \cdot I_{max}}{100} = 0{,}15 \text{ м}A$$

Ошибку отсчетов берем равной половине цены деления прибора: $\Delta U_{отсч} = 0{,}5$ В, $\Delta I_{отсч} = 0{,}2$ мА.

Общая погрешность систематических погрешностей будет:

$$\Delta U_{сист} = \Delta U_{инст} + \Delta U_{отсч} = 1{,}25 \text{ В}$$

$$\Delta I_{сист} = \Delta I_{инст} + \Delta I_{отсч} = 0{,}35 \text{ мА}$$

Находим погрешность сопротивления:

$$\Delta R = R\left(\frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}\right) = 2{,}72\left(\frac{1{,}25}{16{,}50} + \frac{0{,}35}{6}\right) = 0{,}36 \text{ кОм}$$

Тогда сопротивление резистора будет:

$$R = (2{,}72 \pm 0{,}36)\ \text{кОм}$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\Delta R}{R} \cdot 100\% \approx 13{,}4\ \%$$

8. Из закона Ома, для цепи, представленной на рисунке 1, при разрядке конденсатора в результате отключения источника напряжения, записываем:

$$IR + U_C = 0 \qquad (0)$$

Из определения силы тока и подстановки напряжения на конденсаторе имеем:

$$R\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C} \qquad (1)$$

Решая полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$$

Проинтегрируем и находим:

$$\ln\left(\frac{q}{q_0}\right) = -\frac{t}{RC}$$

где q_0 – начальный заряд на конденсаторе. Откуда следует

$$q = q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \qquad (3)$$

Из определения силы тока:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (4)$$

где $I_0 = q_0/RC$,

Из выражения (4) следует:

$$ln\frac{I}{I_0} = -\frac{t}{RC} \text{ или } ln\frac{I_0}{I} = \frac{t}{RC} \qquad (5)$$

При условии, что логарифм в выражении (5) равен единице, получаем

$$t = RC$$

Из этого выражения можем найти ёмкость:

$$C = t_0/R \qquad (6)$$

Для экспериментального определения ёмкости измеряем зависимость изменения силы тока от времени при разрядке конденсатора. Значения записываем в виде таблицы 2.

Таблица 2.

t,c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	13	15	17	20
I, mA	6	5	4,2	3,6	3,2	2,8	2,4	2,2	1,9	1,7	1,6	1,0	0,8	0,5	0,4
I_0/I	1	1,20	1,43	1,67	1,88	2,14	2,50	2,73	3,16	3,53	4,29	6,00	7,50	10,00	15,00
$Ln(I_0/I)$	0	0,18	0,36	0,51	0,63	0,72	0,92	1,00	1,15	1,26	1,46	1,79	2,01	2,30	2,70

Строим график, представленный на рисунке 2.

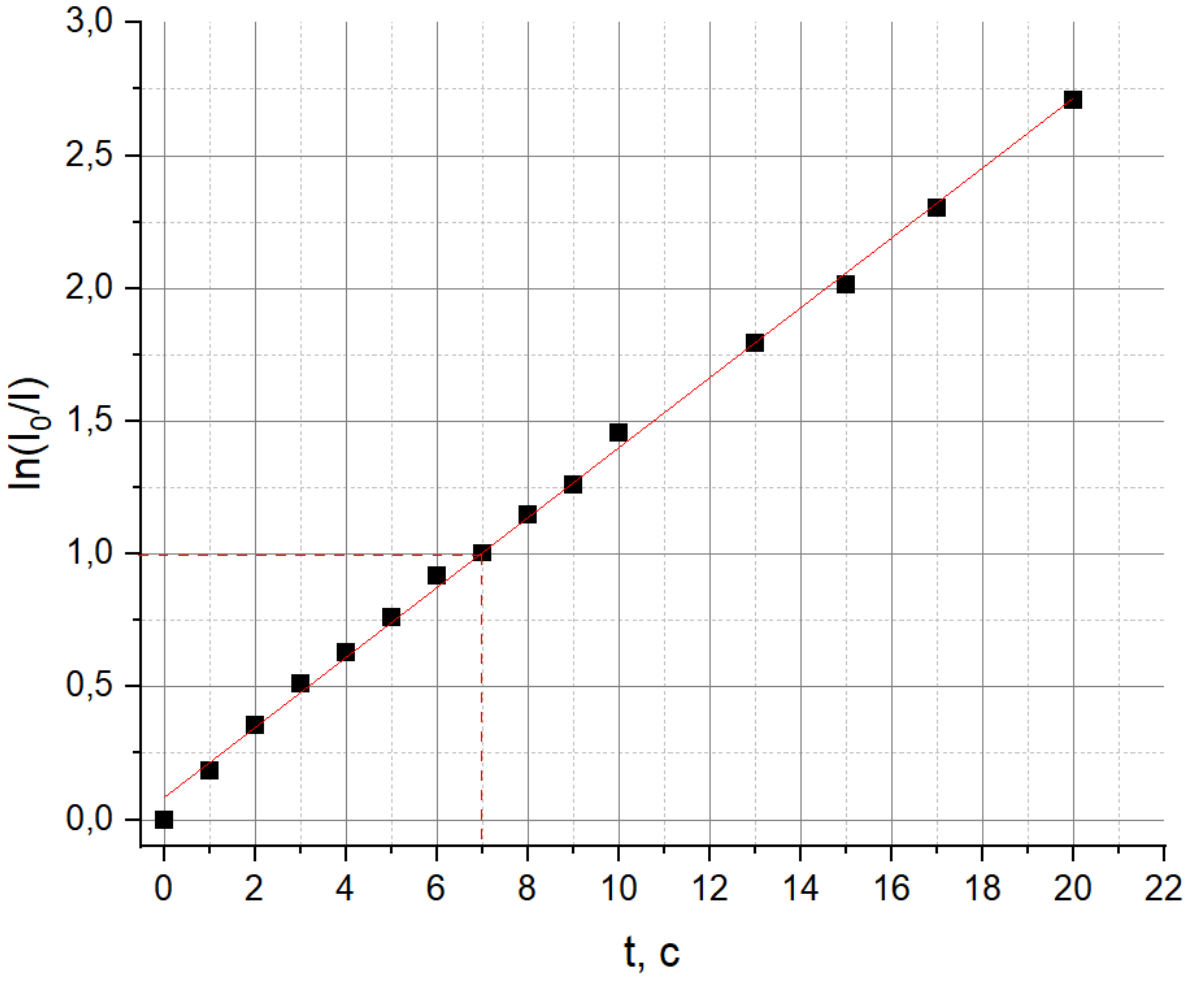


Рис.2

Время t_0 при $ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = 1$, находим из графика на рисунке 2. Соответствующее время равно 7 с и находим искомое значение ёмкости первого конденсатора:

$$C \approx 2{,}57 \text{ мФ}$$

9. Найденные с помощью осциллографа значения напряжений на входе и выходе цепи, заносим в таблицу 2.

Таблица 2.

f, Гц	1,3	3	5	10	20	30,5	40,2	50	60	70	81	90	100
$U_{вх}$, В	1,06	1,62	2,14	2,46	2,50	2,36	2,32	2,28	2,26	2,26	2,26	2,28	2,26
$U_{вых}$, В	1,04	1,56	2,04	2,26	1,96	1,64	1,40	1,16	1,08	0,96	0,84	0,80	0,72
$U_{вых}/U_{вх}$	0,98	0,96	0,95	0,90	0,83	0,70	0,61	0,51	0,48	0,42	0,37	0,35	0,32

Используя эти значения, строим график, показанный на рисунке 3.

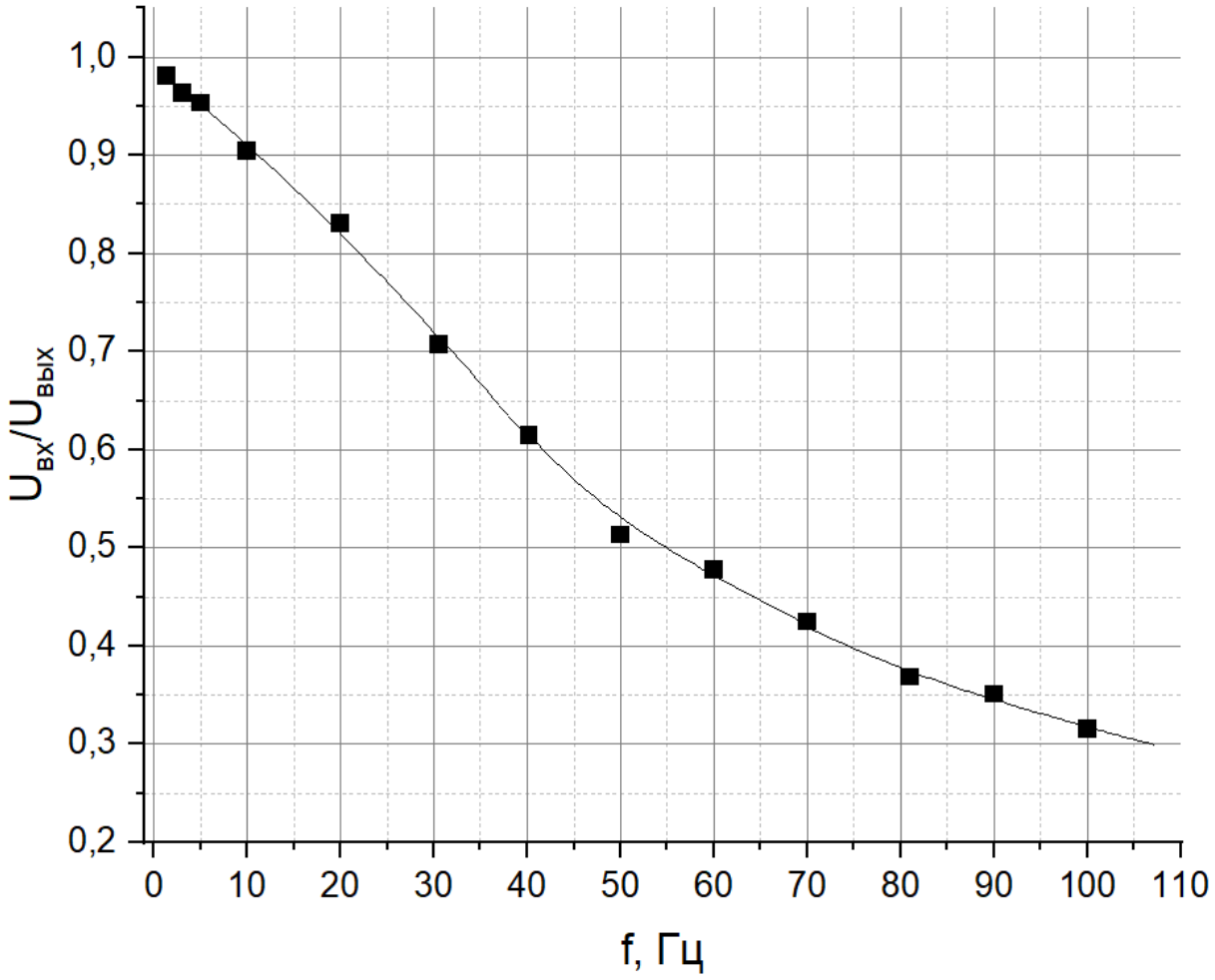


Рис.3

10. Запишем выражения для входного напряжения:

$$U_{вх} = U_R + U_C = IZ \qquad (7)$$

где $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ – полное сопротивление цепи, $X_C = \frac{1}{\omega C_2}$ – реактивное сопротивление конденсатора, $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота, C_2 – ёмкость второго конденсатора. Выходное напряжение снимается с конденсатора, поэтому

$$U_{\text{вых}} = IX_C = \frac{I}{\omega C_2}$$

Тогда

$$K = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{1/\omega C_2}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C_2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega C_2 R)^2+1}} \qquad (8)$$

При равенстве сопротивлений $R = \frac{1}{\omega C_2}$ выражение под корнем в (8) равно 2. В этом случае получим $K = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$. Из графика 3 находим соответствующее данному значению граничную частоту $f_{\text{гр}} \approx 30$ Гц. Из формулы для ёмкостного сопротивления находим:

$$C_2 = \frac{1}{\omega \cdot R} \approx 2 \text{ мкФ}$$

Nпп	Критерий	Балл
1.	Определено значение сопротивления резистора	1
2.	Проведена оценка погрешности значения R по 0.25 баллов за инструментальную и отсчетную методы	0,5
3.	Записан закон Ома для RC-цепи в виде формулы (0)	1
4.	Установлено дифференциальное уравнение (1)	0,5
5.	Получение решение дифференциального уравнения для заряда	0,5
6.	Найдена экспоненциальная зависимость силы тока от времени	1
7.	Из условия равенства логарифм единице найдена формула (6). Если без вывода использована эта формула	1 0,5
8.	Экспериментального определена зависимость изменения силы тока от времени при разрядке конденсатора (таблица измерений, не менее 9 измерений) 5-7 измерений 3-4 измерений	1,5 1 0,5
9.	Построен график зависимости из п.8 в логарифмическом масштабе. Если без логарифмического масштаба	1 0,5
10.	Правильно определено значение времени релаксации τ	2
11.	Найдено численное значение ёмкости конденсатора (отклонение менее 20%) Менее 40 %	1 0,5
12.	Экспериментального определена зависимость изменения напряжений от частоты (таблица измерений, не менее 9 измерений) 5-7 измерений 3-4 измерений	3
13.	Построен график зависимости из п.12.	1
14.	Определено, что K равняется отношению входного и выходного сопротивлений	1
15.	Найдено выходное сопротивление цепи (сопротивление конденсатора)	0,5
16.	Найдено общее сопротивление цепи	1
17.	Использовано условие равенства $R = X_C$	0,5
18.	Найдено значение K≈0,7	0,5
19.	Определена граничная частота $f_{\text{гр}}$	0,5
20.	Найдено численное значение ёмкости конденсатора (отклонение менее 20%)	1

	Менее 40 %	0,5
	Всего	20