

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА
«ТУЙМААДА–2025»
(математика)
Второй день

Якутск 2025

Сборник содержит задачи XXXII Международной олимпиады школьников «Туймаада» по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: А. С. Голованов, В. С. Колежук, К. П. Кохась, А. С. Кузнецов, О. А. Тараканов, И. И. Фролов. Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

Старшая лига

5. По кругу стоят 2025 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из этих 2025 человек сказал: *Среди меня, двух моих соседей слева и двух соседей справа ровно три рыцаря*. Какое наибольшее количество рыцарей может быть среди этих людей?

(А. Голованов)

6. В последовательности (x_n) число x_1 — положительное рациональное и при всех $n \geq 1$ выполняется соотношение

$$x_{n+1} = \frac{\{nx_n\}}{n}$$

(фигурными скобками обозначена дробная часть числа). Докажите, что в этой последовательности лишь конечное число членов, отличных от 0, и их сумма целая.

(В. Колезжук, О. Тараканов)

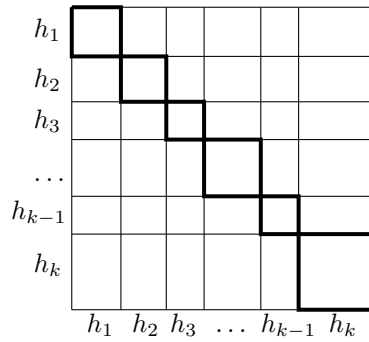
7. Каждую вершину вписанного четырехугольника $ABCD$ отразили симметрично относительно двух не содержащих её сторон (вершину A отразили относительно BC , а также относительно CD и т. д.). Докажите, что из 8 полученных точек какие-то 4 являются вершинами вписанного или описанного четырехугольника.

(А. Кузнецов)

8. *Латинский квадрат* (соотв. *куб*) порядка n — это квадрат $n \times n$ клеток (соотв. куб $n \times n \times n$ единичных кубиков), заполненный различными числами $a_1, a_2, \dots, a_n$ так, что в каждом ряду клеток (кубиков), параллельном любой стороне, каждое число встречается ровно один раз. Даны натуральные числа $h_1, h_2, \dots, h_k$ и $n = h_1 + \dots + h_k$. Некоторый латинский квадрат порядка n разрезали на прямоугольные части, разбив его стороны на отрезки длины $h_1, \dots, h_k$, как показано на рисунке. Оказалось, что при всех i квадратные части $h_i \times h_i$, расположенные вдоль диагонали, сами по себе являются латинскими квадратами порядка h_i и наборы чисел в этих квадратах не пересекаются.

Докажите, что тогда существует латинский куб порядка n , обладающий аналогичным свойством: его стороны можно разбить на отрезки длины $h_1, \dots, h_k$ так, что кубы $h_i \times h_i \times h_i$, образовавшиеся вдоль диагонали большого куба, являются латинскими кубами с непересекающимися наборами чисел.

(D. Donovan, T. Kemp, J. Lefevre)



Младшая лига

5. Все положительные вещественные числа покрашены в три цвета (в каждый цвет покрашено хотя бы одно число). Докажите, что можно выбрать три разноцветных числа, каждое из которых меньше суммы двух других.

(А. Голованов)

6. В последовательности (x_n) первое число x_1 положительно и

$$x_{n+1} = \frac{\{nx_n\}}{n} \quad \text{при } n \geq 1$$

(фигурными скобками обозначена дробная часть числа). Докажите, что последовательность тогда и только тогда не содержит нулей, когда число x_1 иррационально.

(В. Колезжук, О. Тараканов)

7. В каждой из двух комнат сидит по 128 человек. Каждый из этих 256 человек знаком со всеми, кто сидит в другой комнате. За один ход можно выбрать несколько (непересекающихся) пар людей, в каждой из которых люди сидят в разных комнатах, и поменять их местами. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, что каждые два человека хотя бы один раз в какой-то момент находились в разных комнатах?

(I. Benjamini, I. Shinkar, G. Tsur)

8. В треугольнике ABC все стороны попарно различны. Его биссектрисы AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке I . Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_2 . Окружность ω_a проходит через точки A_1 , A_2 и середину отрезка AI . Окружности ω_b и ω_c определяются аналогично. Докажите, что центры окружностей ω_a , ω_b , ω_c лежат на одной прямой.

(И. Фролов)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Старшая лига

5. Ответ: 1350 рыцарей.

Пример: пусть расположение рыцарей и лжецов периодическое: два рыцаря, лжец, два рыцаря, лжец и т. д. Как легко видеть, здесь $\frac{2}{3} \cdot 2025 = 1350$ рыцарей, и условие задачи выполняется.

Оценка. Пусть по кругу стоят r рыцарей и $2025 - r$ лжецов. В каждой пятерке подряд стоящих людей подсчитаем суммарное число рыцарей и все эти количества сложим. Получим сумму $5r$, поскольку каждый рыцарь учтен при подсчете 5 раз. С другой стороны, в пятерке вокруг каждого рыцаря находится 3 рыцаря (это мы знаем из ответа рыцаря), а в пятерке вокруг каждого лжеца — не более 4 рыцарей (остальные четверо). Значит, сумма не превосходит $3r + 4(2025 - r)$. Итак,

$$5r \leq 3r + 4(2025 - r).$$

Отсюда получаем, что $r \leq \frac{2}{3} \cdot 2025$.

6. Суровая правда о последовательности x_n состоит в том, что она представляет собой протокол медленного и печального разложения положительного рационального числа $x_1 = \frac{a}{b}$ в виде $\frac{a}{b} = s + \frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_m}$, где $s = [x_1]$, $k_1 > \dots > k_m$ — натуральные числа, и $x_n = \frac{1}{k_i} + \dots + \frac{1}{k_m}$ при $k_{i-1} < n \leq k_i$.

Действительно, $x_2 = \{x_1\}$ по условию. Рассмотрим момент, когда в последовательности появляется новый член $x_n < 1$ (не равный x_{n-1} или просто первый, если $[x_1] = 0$). Пусть $x_n = \frac{a}{b}$, где a и b — взаимно простые натуральные числа. Рассмотрим наименьшее k , для которого $x_n \geq \frac{1}{k}$. Поскольку $x_n < \frac{1}{n-1}$ в случае $n > 1$, имеем $k \geq n$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$\text{все } x_i \text{ при } n \leq i \leq k \text{ равны } x_n. \quad (1)$$

Так как $x_n < \frac{1}{k-1}$, выполняется неравенство $(k-1)a < b \leq ka < 2b$ и

$$x_{k+1} = \frac{\{\frac{ka}{b}\}}{k} = \frac{ka - b}{kb} = x_n - \frac{1}{k}. \quad (2)$$

Заметим, что числитель несократимой записи числа x_{k+1} не превосходит $ka - b < a$, то есть он меньше, чем у x_n . Поскольку бесконечно уменьшать числитель нельзя, в какой-то момент очередной член последовательности будет равен 0.

Пусть последний ненулевой член последовательности имеет номер k_m . Тогда он равен $\frac{1}{k_m}$. Если наибольший номер ненулевого члена, отличного от x_{k_m} , обозначить k_{m-1} , то по формуле (2) этот член равен $\frac{1}{k_{m-1}} + \frac{1}{k_m}$. Продолжая таким образом восстановление последовательности с конца, мы придём к доказываемой формуле.

Теперь искомую сумму можно с учетом (1) переписать в виде

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k_m} = s + k_1 \cdot \frac{1}{k_1} + k_2 \cdot \frac{1}{k_2} + \dots + k_m \cdot \frac{1}{k_m} = s + m,$$

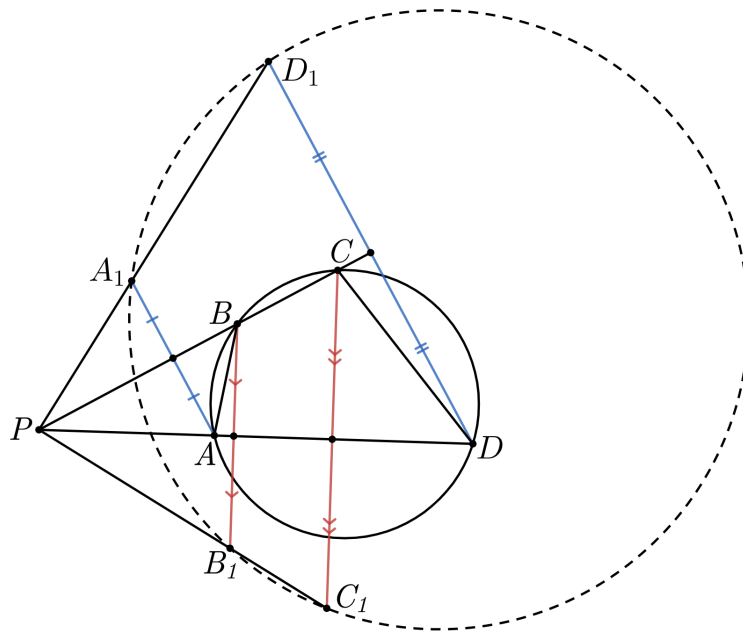
и это число, разумеется, целое.

7. Если $ABCD$ — трапеция (или прямоугольник), то утверждение задачи очевидно в силу симметрии относительно оси равнобокой трапеции. Пусть прямые BC и AD пересекаются в точке P . Через A_1 и D_1 обозначим точки, симметричные точкам A и D относительно прямой BC . В силу симметрии получаем, что точки P , A_1 и D_1 лежат на одной прямой и $PA_1 \cdot PD_1 = PA \cdot PB$.

Через B_1 и C_1 обозначим образы точек B и C при симметрии относительно прямой AD . В силу симметрии получаем, что точки P , B_1 и C_1 лежат на одной прямой и $PB_1 \cdot PC_1 = PB \cdot PC$.

Таким образом,

$$PA_1 \cdot PD_1 = PA \cdot PB = PB \cdot PC = PB_1 \cdot PC_1$$



и, значит, точки A_1, B_1, C_1, D_1 либо лежат на одной окружности, что и требовалось, либо на одной прямой.

Заметим, что в силу симметрии $\angle D_1PC_1 = 3\angle BPA$. Значит, в случае, когда точки A_1, B_1, C_1, D_1 оказались на одной прямой, $\angle BPA = 60^\circ$. Рассмотрев точку Q пересечения прямых AB и CD и рассуждая аналогично, получаем, что нам осталось разобраться со случаем, когда еще и $\angle AQD = 60^\circ$. В этой ситуации четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно одной из своих диагоналей, скажем, относительно BD . Тогда точки, симметричные точке C относительно прямых AB и AD и точке A относительно прямых BC и CD , суть вершины равнобокой трапеции, т. е. вписанного четырехугольника.

8. Не нарушая условия задачи, заменим числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ числами $1, 2, \dots, n$ так, чтобы каждый диагональный квадрат $h_i \times h_i$ был заполнен числами, являющимися координатами его клеток.

Пусть в латинском квадрате $\mathcal{L}$, описанном в условии, в клетке, находящейся на пересечении r -й строки и c -го столбца, написано число $L(r, c)$. Множество чисел, которыми заполнен диагональный квадрат $h_i \times h_i$, обозначим через S_i .

Латинский куб будем представлять себе как набор латинских квадратов, расположенных в горизонтальных слоях друг над другом. Таким образом, единичные кубические «клетки» в латинском кубе задаются тремя координатами (r, c, ℓ) , где ℓ — номер слоя, r и c — номера строки и столбца в слое. Требуемый куб $\mathcal{C}$ можно задать следующим правилом. Пусть в единичном кубике с координатами (r, c, ℓ) записано число

$$C(r, c, \ell) = L(L(r, \ell), c).$$

Проверим сначала, что это правило задает латинский куб. Действительно, пусть координаты c и ℓ фиксированы, а r пробегает значения $1, 2, \dots, n$. Тогда величина $L(r, \ell)$ тоже пробегает значения $1, 2, \dots, n$ в том порядке, в котором они записаны в ℓ -м столбце исходного латинского квадрата $\mathcal{L}$. Тогда вторая итерация $L(L(r, \ell), c)$ пробегает все значения, записанные в c -м столбце квадрата $\mathcal{L}$. Иными словами, мы установили, что в любом ряде единичных кубиков, параллельном первой координатной оси, все числа различны. Аналогично проверяется, что в рядах кубиков, параллельных другим осям, числа тоже различны.

Теперь проверим, что в каждом единичном кубике (r, c, ℓ) , лежащем в диагональном кубе $h_i \times h_i \times h_i$, записано число из множества S_i . Это очевидно. Действительно, если координаты r, c, ℓ принадлежат множеству S_i , то $L(r, \ell) = a \in S_i$ и $L(a, c) \in S_i$ по свойству квадрата $\mathcal{L}$. Таким образом, $C(r, c, \ell) = L(L(r, \ell), c) \in S_i$.

Младшая лига

5. Предположим противное: пусть никакие три разноцветных числа не удовлетворяют условию, то есть для любых чисел x и $y > x$ разного цвета между y и $x + y$ нет чисел цвета, отличного от их цветов.

Возьмём три разноцветных числа $a < b < c$ и назовём цвет a первым, b вторым, а c третьим. Мы предположили, что между b и $a + b$ нет чисел третьего цвета. Докажем индукцией по k , что при любом натуральном k в промежутке между b и $\frac{ak}{2} + b$ нет чисел третьего цвета. При $k = 2$ мы это уже получили. А если чисел третьего цвета нет между b и $\frac{ak}{2} + b$, то число $y = \frac{a(k-1)}{2} + b$ — первого или второго цвета. С одним из чисел a или b оно образует разноцветную пару, значит, между y и $y + a = \frac{a(k-1)}{2} + b$ или даже между y и $y + b > y + a$ тоже нет чисел третьего цвета.

С другой стороны, $c < \frac{ak}{2} + b$ при некотором натуральном k — противоречие.

6. Если x_n иррационально, то иррационально и $x_{n+1} = \frac{\{nx_n\}}{n}$, поэтому при иррациональном x_1 иррациональны все члены последовательности. А если x_1 рационально, то все x_n рациональны. В этом случае мы представим каждый член последовательности в виде несократимой дроби с натуральным знаменателем. Докажем, что для каждого члена x_n , $n > 1$, с ненулевым числителем найдётся член с меньшим числителем.

Пусть $x_n = \frac{a}{b}$, где a и b — взаимно простые натуральные числа. Рассмотрим наименьшее k , для которого $x_n \geq \frac{1}{k}$. Поскольку $x_n < \frac{1}{n-1}$, имеем $k \geq n$. Все x_i при $n \leq i \leq k$ равны x_n . Так как $x_n < \frac{1}{k-1}$, $(k-1)a < b \leq ka < 2b$ и

$$x_{k+1} = \frac{\{\frac{ka}{b}\}}{k} = \frac{ka - b}{kb}.$$

Так как $ka - b < a$, числитель x_{k+1} меньше числителя x_n .

Бесконечно уменьшаться натуральный числитель не может, поэтому в последовательности встретится 0.

7. Ответ: за 7 ходов.

Оценка. Обозначим комнаты символами A и B . Предположим, что нам удалось достичь требуемого за t ходов. Дадим каждому человеку бумажку, на которой напишем строку из $t + 1$ букв A и B , где первая буква — комната, в которой человек находился изначально; следующие t букв — комнаты, в которых он находился после каждого из t ходов. Если два человека хотя бы один раз сидели в разных комнатах,

треугольниках. Следовательно, точки S и A_2 — соответственные элементы в треугольниках LIN и BIC . Однако, из подобия SIR и A_2IA_1 следует, что соответственными элементами в LIN и BIC также являются точки R и A_1 . Пусть X — середина отрезка SR , Y — середина отрезка A_2A_1 . Тогда X и Y — также соответственные точки при подобии LIN и BIC .

Пусть T — середина отрезка LN , M — середина отрезка BC . Тогда T и N — соответственные точки при подобии LIN и BIC . Из того, что соответственные отрезки в подобных треугольниках относятся одинаково, получаем, что

$$\frac{SX}{XT} = \frac{A_2Y}{YM}. \quad (3)$$

Восставим перпендикуляры к прямой ST в точках S , X и T соответственно. Тогда они пересекают прямую IO в точках I , O_1 и O соответственно. По теореме Фалеса

$$\frac{SX}{XT} = \frac{IO_1}{O_1O}. \quad (4)$$

Восставим перпендикуляры к прямой A_2M в точках A_2 , Y и M соответственно. Тогда они пересекают IO в точках I , O_2 и O соответственно. По теореме Фалеса

$$\frac{A_2Y}{YM} = \frac{IO_2}{O_2O}. \quad (5)$$

Объединяя результаты (3), (4) и (5) получаем, что

$$\frac{IO_1}{O_1O} = \frac{IO_2}{O_2O}.$$

Таким образом, $O_1 = O_2$. Иным словами, серединные перпендикуляры к SR и A_2A_1 пересекаются на IO и не совпадают в силу того, что треугольник ABC — разносторонний. С другой стороны, серединные перпендикуляры к SR и A_2A_1 проходят через центр окружности ω_a . Значит, центр окружности ω_a лежит на прямой IO , что и требовалось.