МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА–2025» (математика)

Первый день

Якутск 2025

Сборник содержит задачи XXXII Международной олимпиады школьников «Туймаада» по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: М. А. Антипов, С. Л. Берлов, Е. И. Галахова, А. С. Голованов, К. П. Кохась. А. С. Кузнецов, И. А. Кухарчук. Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

© Министерство образования и науки РС(Я), 2025.

Старшая лига

1. Каждой точке P пространства сопоставлено вещественное число $f(P)$ так, что для любого правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром 1 выполнено равенство

$$f(A) + f(B) = f(C) + f(D).$$

Докажите, что функция f — константа.

(*А. Голованов*)

2. Окружности ω_1 и ω_2 проходят через точку A и касаются прямой ℓ в точках B_1 и B_2 соответственно. Переменная прямая m проходит через точку A и вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в (переменных) точках P_1 и P_2 соответственно. Лучи P_1B_1 и P_2B_2 пересекаются в точке P. Докажите, что касательная в точке P к описанной окружности треугольника PP_1P_2 проходит через точку, не зависящую от выбора прямой m.

(*А. Кузнецов*)

3. В теннисном клубе играют $n > 3$ спортсменов. За месяц каждые два сыграли не более одной партии. Известно, что если спортсмен A выиграл у B, а B выиграл у C, то C выиграл у A. Докажите, что можно выбрать не менее $n/3$ спортсменов, никакие два из которых не играли друг с другом.

(*С. Берлов*)

4. Положительные числа $a_1, \ldots, a_n$ и вещественные числа $b_1, \ldots, b_n$, c, d удовлетворяют при всех вещественных x равенству

$$[a_1x + b_1] + \ldots + [a_nx + b_n] = [cx + d].$$

Докажите, что не все числа $a_1, \ldots, a_n$ различны.

(*А. Голованов*)

Младшая лига

1. Отрезок натурального ряда содержит больше чисел, кратных a, чем чисел, кратных b. Докажите, что он содержит не меньше чисел, кратных $2a$, чем чисел, кратных $2b$.

(*А. Голованов*)

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Его диагонали равны и пересекаются в точке P. Лучи AB и DC пересекаются в точке Q. Оказалось, что $\angle BPC = 2\angle BQC$. Докажите, что окружность, проходящая через точку B и касающаяся прямой AC в точке A, равна окружности, проходящей через точку C и касающейся прямой BD в точке D.

(*Е. Галахова, И. Кухарчук*)

3. В зоомагазине по кругу стоят 4 вольера по 222 попугая в каждом. Иногда зоолог извлекает одного попугая из какого-нибудь вольера и отпускает его на волю, а вместе с ним еще отпускает либо одного попугая из вольера напротив, либо двух из вольера слева, либо трёх из вольера справа. В какой-то момент попугаи остались ровно в одном вольере. Какое наименьшее количество попугаев могло там оказаться?

(*М. Антипов*)

4. См. задачу 3 старшей лиги.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Старшая лига

1. Возьмем произвольный правильный тетраэдр $ABCD$ с единичным ребром. Тогда

$$f(A) + f(B) = f(C) + f(D).$$

Мысленно поменяв местами вершины тетраэдра B и C, получаем равенство:

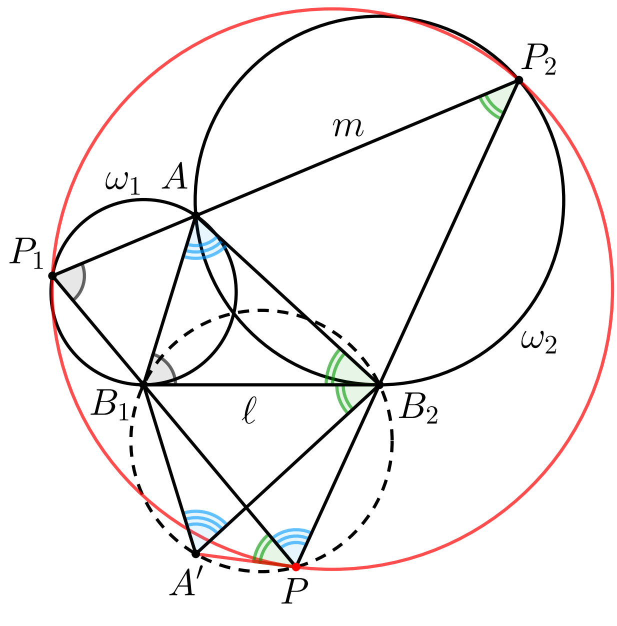
$$f(A) + f(C) = f(B) + f(D).$$

Сопоставляя эти равенства, видим, что $f(A) = f(D)$. Иными словами, значение функции не меняется при сдвиге на произвольный вектор длины 1.

Поскольку любые две точки в пространстве можно соединить ломаной со звеньями длины 1, значения функции f в любых двух точках равны, q.e.d.

2. Пусть точка A' симметрична точке A относительно прямой ℓ. Докажем, что через точку A' проходят все касательные из условия. Заметим, что

$$\angle B_1PB_2 = \angle P_1PP_2 = 180^\circ - \angle AP_1B_1 - \angle AP_2B_2 =$$
$$= 180^\circ - \angle AB_1B_2 - \angle AB_2B_1 = \angle B_1AB_2 = \angle B_1A'B_2.$$



Из этой цепочки равенств получаем, что $\angle B_1PB_2 = \angle B_1A'B_2$. Следовательно, четырехугольник $B_1A'PB_2$ вписанный и $\angle A'PB_1 = \angle A'B_2B_1$. Таким образом, $\angle P_1P_2P = \angle AB_2B_1 = \angle A'B_2B_1 = \angle A'PB_1$. То есть величина угла $A'PB_1$ равна величине угла P_1P_2P независимо от выбора прямой m. Тогда по теореме об угле между касательной и хордой прямая PA' всегда касается окружности (PP_1P_2).

3. Рассмотрим ориентированный граф G, где вершины — спортсмены, и стрелка выходит из вершины A в вершину B тогда и только тогда, когда игрок A выиграл у игрока B. Докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение. Вершины графа G можно раскрасить в три цвета так, чтобы стрелки из вершин первого цвета ребра выходили только в вершины второго, стрелки из вершин второго — только в вершины третьего, стрелки из вершин третьего — только в вершины первого.

Доказательство. Индукция по числу вершин. В качестве базы рассмотрим все графы, в которых у каждой вершины либо нет входящих в нее ребер, либо нет исходящих из нее ребер. Для таких графов раскраска очевидна.

Индукционный переход. Предположим, что в графе нашлась вершина B, из которой выходят ребра в вершины C_1, C_2, $\ldots$ C_k и в которую входят ребра из вершин A_1, A_2, $\ldots$ A_ℓ. По условию задачи из каждой вершины C_j выходят ребра в каждую из вершин A_i.

Тогда удалим из графа вершину B. Для оставшегося графа условие задачи также верно, следовательно, по предположению индукции существует требуемая раскраска его вершин в три цвета. Не нарушая общности, будем считать, что вершина C_1 окрашена в первый цвет. Тогда все вершины, в которые выходит стрелка из C_1, окрашены во второй цвет. В частности, во второй цвет окрашены все вершины A_1, A_2, $\ldots$, A_ℓ. Далее, все вершины, из которых выходит стрелка в A_1, должны быть первого цвета. В частности, первого цвета — вершины C_1, C_2, $\ldots$, C_k. Тогда окрасим удаленную вершину B в третий цвет, что завершает доказательство индукционного перехода.

Приступим собственно к решению задачи. Раскрасим вершины графа в три цвета, пользуясь только что доказанным утверждением. Тогда вершин одного из трех цветов будет не менее $n/3$. Поскольку одноцветные вершины не соединены ребрами, получаем требуемый набор вершин.

4. Очевидно, $c \neq 0$. Сделав в исходном равенстве замену $y = cx + d$, получим аналогичное равенство, в котором вместо чисел a_1, $\ldots$, a_n

будут числа $a_1/c, \ldots, a_n/c$. Если среди сих последних есть равные, есть они и среди исходных чисел, поэтому мы можем и будем в дальнейшем считать, что $c = 1$ и $d = 0$.

Каждое слагаемое $[a_s x + b_s]$ левой части не убывает с ростом x и изменяется ровно на 1 в точках арифметической прогрессии с разностью $d_s = 1/a_s$. Правая часть изменяется на 1 во всех целых точках. Это значит, что разности d_s упомянутых прогрессий суть натуральные числа, а сами эти прогрессии не пересекаются и дают в объединении множество всех целых чисел. Мы докажем, что все разности этих прогрессий не могут быть различны, используя следующую лемму.

Лемма. Пусть $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{m-1}$ — все комплексные корни из 1 степени m. Тогда сумма их k-х степеней равна 0 при натуральных $k < m$ и не равна 0 при $k = m$.

Доказательство. При $k < m$ имеем

$$1^k + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \ldots + \varepsilon^{(m-1)k} = \frac{\varepsilon^{mk} - 1}{\varepsilon^k - 1} = 0.$$

А при $k = m$ все слагаемые в сумме равны 1.

Докажем, что наибольшая из разностей d_s встречается как минимум у двух прогрессий. Допустим, что это не так, скажем, $d_1 > d_s$ при $2 \leqslant s \leqslant n$. Пусть M — наименьшее общее кратное всех чисел d_s и ε — первообразный корень степени M из единицы (то есть $\varepsilon^M = 1$ и $\varepsilon^t \neq 1$ при $0 < t < M$). Каждое целое число от 0 до $M - 1$ содержится ровно в одной из прогрессий. Поэтому все комплексные корни $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{M-1}$ степени M из 1 разбиваются на n *групп*, s-я из которых состоит из всех чисел вида ε^a, где a пробегает элементы s-й прогрессии. Такая группа имеет вид

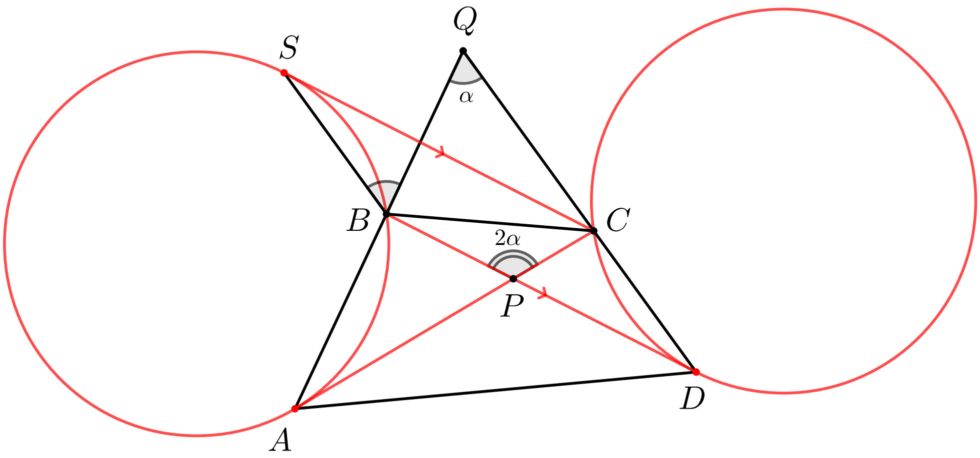
$$\varepsilon^{r_s}, \quad \varepsilon^{r_s+d_s}, \quad \ldots, \quad \varepsilon^{r_s+M-d_s}$$

и состоит из всех комплексных корней из 1 степени M/d_s, домноженных на ε^{r_s}. Возведём все корни M-й степени из 1 в степень $k = \frac{M}{d_1}$. В силу леммы сумма всех этих k-х степеней равна 0. С другой стороны, сумма всех k-х степеней в каждой группе, кроме первой, равна 0 (так как $\frac{M}{d_s} > k = \frac{M}{d_1}$ при $s > 1$), а в первой — не равна. Противоречие.

Младшая лига

1. Пусть отрезок содержит m чисел, кратных a, и n чисел, кратных b, где $m \geqslant n + 1$. Тогда на нем имеется не меньше $[\frac{n}{2}]$ чисел, кратных $2a$, и не больше $[\frac{m}{2} + 1]$ чисел, кратных $2b$. Ясно, что первое количество не меньше второго.

2. Построим точку S так, чтобы четырехугольник $BDCS$ оказался параллелограммом. Пусть $\angle BQC = \alpha$, тогда $\angle SBQ = \alpha$ (углы SBQ и BQC накрест лежащие), $\angle ACS = 180^\circ - 2\alpha$ как односторонний с $\angle BPC$. Получается, что точка B лежит на окружности ω, касающейся сторон угла ACS в точках A и S. При центральной симметрии относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма $BDCS$ прямая CS переходит в BD, точка B отображается в точку C и окружность ω перейдёт в окружность, касающуюся BD в D и проходящую через C.



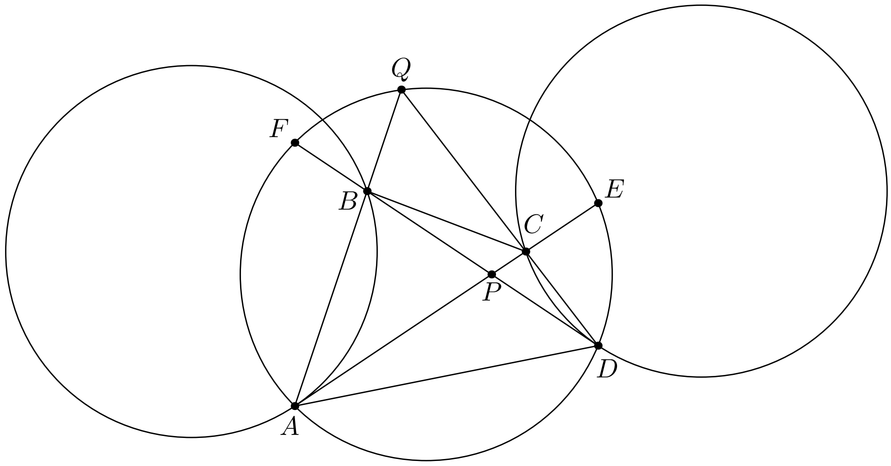
В т о р о е р е ш е н и е. Заметим, что окружности (ACQ) и (QBD) равны, поскольку равны хорды AC и BD, видимые из точки Q этих окружностей под углом α. Отношение радиусов окружностей (ABS) и (ACQ) равно $\frac{AB}{QC}$, поскольку из точки A, принадлежащей обеим окружностям, хорда AB первой окружности и хорда QC второй видны под одним и тем же углом $\angle QAC$. Аналогично, отношение радиусов окружностей (CDT) и (QBD) равно $\frac{CD}{QB}$. Для завершения доказательства, остается проверить равенство этих отношений, т. е. равенство

$$AB \cdot BQ = QC \cdot CD.$$

Пусть E и F — вторые точки пересечения лучей DP и AC с окружностью (QAD) соответственно. Внутренний угол APD имеет величину 2α и опирается на дугу AD угловой величины α и хорду EF. Значит, хорда EF тоже имеет угловую величину α и тогда $AD = EF$, откуда следует, что хорды DF и AE тоже равны. Поскольку части DB и AC этих хорд равны, мы заключаем, что $BF = CE$. Теперь по теореме о произведении отрезков секущих получаем

$$AB \cdot BQ = BF \cdot BD = CE \cdot AC = QC \cdot CD,$$

что и требовалось.



3. Ответ: 5 попугаев.

Обозначим вольеры через A, B, C, D в порядке обхода по часовой стрелке, а текущее количество попугаев в них через a, b, c, d.

Пример. Выполним 72 операции вида $(a-1, b-3)$, 6 операций $(a-1, d-2)$, а также 70 операции $(c-1, d-3)$ и 3 операции $(c-1, b-2)$. В результате вольеры B и D опустеют, а в вольере A останется на 5 попугаев больше, чем в C. Далее с помощью операций $(a-1, c-1)$ мы сможем отпустить всех попугаев, кроме пятерых страдальцев из вольера A.

Оценка. Заметим, что $3^4 \equiv 1$, $3^2+1 \equiv 0$ и $2 \cdot 3^3 + 1 \equiv 0 \pmod 5$. Поэтому сумма

$$a + 3b + 3^2c + 3^3d \mod 5$$

не меняется при проведении операций. Вначале эта сумма была равна $0 \bmod 5$, поэтому в конце при $b = c = d = 0$ в вольере A должно быть кратное 5 ненулевое число попугаев.

4. См. задачу 3 старшей лиги.