МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА–2024» (математика)

Второй день

Якутск 2024

Сборник содержит задачи XXXI Международной олимпиады школьников «Туймаада» по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: С. Л. Берлов, А. С. Голованов, К. П. Кохась, Ю. В. Кузьменко, А. А. Марданов, Ф. В. Петров. Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

Старшая лига

5. В квадрате 25×25 отмечено несколько клеток таким образом, что в каждом подквадрате размером 13×13 и 4×4 отмечено не менее половины клеток. Какое минимальное количество клеток могло быть отмечено в исходном квадрате?

(*С. Берлов*)

6. Дан треугольник ABC. На дуге BC его описанной окружности, не содержащей точку A, выбирается переменная точка X, а на лучах XB и XC — переменные точки Y и Z соответственно так, что $XA = XY = XZ$. Докажите, что прямая YZ проходит через фиксированную точку. (*А. Кузнецов*)

7. Даны два многочлена f и g сотой степени с вещественными коэффициентами. Оказалось, что для каждого натурального n существует целое число k такое, что $\frac{f(k)}{g(k)} = \frac{n+1}{n}$. Докажите, что многочлены f и g имеют общий непостоянный множитель. (*А. Голованов*)

8. Дан граф G на n вершинах (где $n > 1$). Для каждого ребра e обозначим через $c(e)$ число вершин наибольшего полного подграфа, в котором оно содержится. Докажите неравенство (суммирование ведётся по всем ребрам графа G):

$$\sum_e \frac{c(e)}{c(e)-1} \leqslant \frac{n^2}{2}.$$

(*D. Malec, C. Tompkins*)

Младшая лига

5. В квадрате 25×25 отмечено несколько клеток таким образом, что в каждом подквадрате размером 13×13 и 4×4 отмечено не менее половины клеток. Какое минимальное количество клеток могло быть отмечено в исходном квадрате?

(*С. Берлов*)

6. Продолжение биссектрисы BL треугольника ABC (где $AB < BC$) пересекает его описанную окружность в точке N. Пусть точка M — середина отрезка BL. На стороне BC треугольника ABC как на основании построили во внешнюю сторону равнобедренный треугольник BDC с углом при вершине D равным углу ABC. Докажите, что $CM \perp DN$. (*А. Марданов*)

7. Даны два квадратных трёхчлена f и g с целыми коэффициентами. Оказалось, что для каждого натурального n существует целое число k такое, что $\frac{f(k)}{g(k)} = \frac{n+1}{n}$. Докажите, что трехчлены f и g имеют общий корень.

(*А. Голованов*)

8. Фабрика выпускает несколько видов глиняных игрушек. Их красят в k цветов. *Разнообразием цвета* назовем количество *различных* игрушек, покрашенных в этот цвет. (Например, если есть 5 синих котов, 7 синих мышей и больше ничего синего нет, то синий цвет имеет разнообразие 2.) При раскраске требуется, чтобы *каждый цвет был использован и чтобы разнообразия любых двух цветов различались*. Известно, что игрушки, хранящиеся на складе, можно было покрасить с выполнением этого условия. Но перед покраской на склад привезли партию глиняных Чебурашек (раньше Чебурашек не было). Количество Чебурашек не меньше, чем количество игрушек любого другого вида. Суммарное количество всех игрушек, включая Чебурашек, не меньше $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Докажите, что теперь игрушки можно покрасить в $k+1$ цвет так, что условие будет выполняться.

(*Ф. Петров*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Старшая лига

5. Ответ: 313, т.е. чуть больше половины.

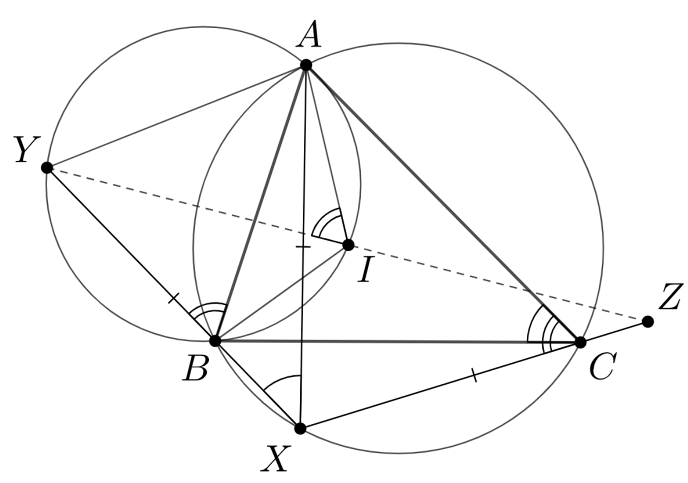
Оценка. Рассмотрим два квадрата 13×13, содержащих противоположные углы исходного квадрата. Они пересекаются по центральной клетке, поэтому в их объединении содержится не менее $85+85-1 = 169$ отмеченных клеток. Оставшиеся два квадрата 12×12 разбиваются на квадраты 4×4, поэтому содержат не менее 144 отмеченных клеток, итого не менее 313 отмеченных клеток.

Пример. В шахматной раскраске квадрата 25×25 с чёрными углами отметим все белые клетки (312) и дополнительно центральную (чёрную) клетку квадрата. Тогда очевидно, что в квадратах 4×4 отмечено не меньше половины всех клеток. В квадратах 13×13 это тоже так, поскольку каждый квадрат 13×13 содержит 85 или 84 белые клетки, а также обязательно содержит центральную клетку.

6. Покажем, что прямая YZ проходит через центр I вписанной окружности треугольника ABC. Так как точка X лежит на дуге BC описанной окружности треугольника ABC, $\angle BXA = \angle BCA$. Поскольку треугольник AXY равнобедренный,

$$\angle AYX = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle YXA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCA.$$

Угол $\angle AIB$ между биссектрисами равен $90^\circ + \frac{1}{2}\angle BCA$, поэтому четырёхугольник $AIBY$ вписанный. Значит, $\angle AIY = \angle ABY$. Аналогично



$\angle AIZ = \angle ACZ$. Поскольку четырёхугольник $ABXC$ вписанный, получаем, что $180^\circ = \angle ABY + \angle ACZ = \angle AIY + \angle AIZ$. Следовательно, точки Y, I, Z лежат на одной прямой.

7. Рассмотрим разность $f_1(x) = f(x) - g(x)$. По условию для каждого натурального числа n найдётся целое число k_n, такое что $\frac{f_1(k_n)}{g(k_n)} = \frac{1}{n}$. Разделим многочлен $g(x)$ на $f_1(x)$ с остатком:

$$g(x) = f_1(x)q(x) + r(x).$$

Деля это равенство на многочлен $g(x)$ и подставляя всевозможные k_n, не являющиеся корнями $g(x)$, находим, что при всех n, кроме, возможно, конечного числа,

$$q(k_n) + \frac{r(k_n)}{f_1(k_n)} = n. \qquad (*)$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \infty$ (так как k_n — последовательность различных целых чисел), и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r(k_n)}{f_1(k_n)} = 0$, то есть при всех n, кроме конечного числа, число n — ближайшее целое к $q(k_n)$.

Поскольку многочлен $q(x)$, таким образом, неограничен, можно утверждать, что для некоторого C он монотонен при $x > C$ и при $x < -C$, и не принимает при $|x| \leqslant C$ никаких значений, которые он принимает при $|x| > C$.

Если степень многочлена $q(x)$ больше 1, то при достаточно больших x выполняется неравенство $|q(x+1) - q(x)| > 3$. Это значит, что среди трёх последовательных натуральных чисел n, больших C, ближайшими к значениям $q(x)$ в целых точках могут оказаться не более двух из этих чисел — противоречие. Таким образом, многочлен $q(x)$ — линейный: $q(x) = ax + b$.

Поскольку в силу $(*)$ значение $ak_n + b$ при достаточно больших n отличается от n сколь угодно мало, разность $a(k_{n+1} - k_n)$ сколь угодно мало отличается от 1. Но эта разность отличается от a в целое число раз и, следовательно, при больших n равна 1. Тем самым разность $k_n a + b - n$ постоянна и стремится к 0, следовательно, равна 0 при достаточно больших n.

Мы доказали, что $r(n) = 0$ при всех достаточно больших n, значит, r — тождественно нулевой многочлен, откуда $g(x) = (ax+b)f_1(x)$, т. е. многочлен g кратен f_1 и $f = g + f_1$ тоже, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Мы доказали, что у многочленов f и g есть общий множитель 99 степени. Поскольку эта степень нечётна, у этого общего множителя есть вещественный корень, который является общим корнем f и g.

8. Для каждого множества X число элементов X будем обозначать через $|X|$. Клика — это подграф, являющийся полным графом.

Докажем утверждение индукцией по n. База $n = 2$ очевидна.

Докажем переход. Обозначим через E множество ребер графа G (мы считаем, что граф содержит хотя бы одно ребро). Пусть k — размер максимальной клики в графе G, и пусть C — клика с k вершинами. Разобьем множество ребер E на три части: E_C — это ребра внутри C, $E_{G\setminus C}$ — ребра в $G \setminus C$ и E_S — ребра, которые соединяют вершины C с вершинами $G \setminus C$. По отдельности оценим вклад каждой из этих частей в нашу сумму.

1. Поскольку C — клика максимального размера, множество E_C состоит из $k(k-1)/2$ ребер, и для всех этих ребер $c(e) = k$. Таким образом,

$$\sum_{e\in E_C} \frac{c(e)}{c(e)-1} = \frac{k(k-1)}{2} \cdot \frac{k}{k-1} = \frac{k^2}{2}.$$

2. Для каждой вершины $v \in V(G \setminus C)$ рассмотрим множество $C_v = \{w \in C \mid \{v, w\} \in E\}$ — это множество вершин клики C, которые соединены с v. Заметим, что вершины множества $C_v \cup \{v\}$ сами образуют клику, следовательно, $|C_v| + 1 \leqslant k$ и $c(e) \geqslant |C_v| + 1$ для всех ребер e, соединяющих v с C. Тогда

$$\sum_{e\in E_S} \frac{c(e)}{c(e)-1} \leqslant \sum_{v\in V(G\setminus C)} |C_v| \cdot \frac{|C_v|+1}{|C_v|} \leqslant \sum_{v\in V(G\setminus C)} k = (n-k)k.$$

3. Наконец, применим предположение индукции к множеству $G \setminus C$

$$\sum_{e\in E_{G\setminus C}} \frac{c(e)}{c(e)-1} \leqslant \frac{(n-k)^2}{2}.$$

Собирая все три оценки вместе, получаем, что

$$\sum_{e\in E} \frac{c(e)}{c(e)-1} \leqslant \frac{k^2}{2} + k(n-k) + \frac{(n-k)^2}{2} = \frac{n^2}{2},$$

как нам и требовалось.

З а м е ч а н и е. Равенство достигается на полном многодольном графе с долями одинакового размера.

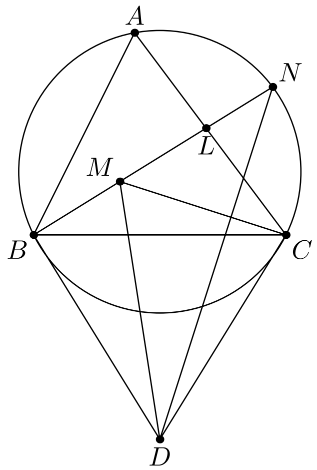
Младшая лига

5. См. задачу 5 старшей лиги.

6. Заметим, что $BL \perp BD$, поскольку в равнобедренном треугольнике BCD

$$\angle CBD = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BDC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC = 90^\circ - \angle LBC.$$

Тогда



$$\begin{aligned} DM^2 - DC^2 = BM^2 &= && (1)\\ = NM^2 - (NM - BM)(NM + BM) &= && (2)\\ = NM^2 - NL \cdot NB &= && (3)\\ = NM^2 - NC^2 & && (4) \end{aligned}$$

Здесь в строке (1) мы написали теорему Пифагора для треугольника MBD, совпадение строки (1) и строки (2) проверяется раскрытием скобок.

Полученное равенство $DM^2 - DC^2 = NM^2 - NC^2$, как известно, эквивалентно требуемой перпендикулярности.

7. Рассмотрим разность $f_1(x) = f(x) - g(x)$. По условию для каждого натурального числа n найдётся k такое, что $\frac{f_1(k)}{g(k)} = \frac{1}{n}$. Иными словами $\frac{f_1(x)}{g(x)}$ бывает сколь угодно малым при сколь угодно больших x. Значит, многочлен $f_1(x)$ линейный (и непостоянный, иначе оказалось бы, что квадратный трёхчлен g/f_1 принимает все натуральные значения, что невозможно). Разделим многочлен $g(x)$ на $f_1(x)$ с остатком:

$$g(x) = f_1(x)q(x) + r.$$

Поскольку f_1 — линейный многочлен, а коэффициенты многочленов целые, остаток r — это рациональное число (постоянный многочлен). Неполное частное $q(x) = ax + b$ — тоже линейный многочлен, и для каждого натурального n (кроме, возможно, единственного корня f_1) существует такое целое число k_n, что $q(k_n) + \frac{r}{k_n} = n$. Отсюда следует, что коэффициенты многочлена q также рациональны, и числа $q(k_n)$ записываются дробями, знаменатели которых ограничены (общим знаменателем коэффициентов многочлена $q(x)$). Значит, ограничены и знаменатели чисел $\frac{r}{k_n}$, что возможно лишь при $r = 0$. Поэтому многочлен $g(x)$ делится на $f_1(x)$. Тогда $f(x) = g(x) + f_1(x)$ тоже делится на $f_1(x)$, и корень f_1 является их общим корнем.

8. Докажем утверждение задачи индукцией по k.

База индукции — $k = 0$: никаких игрушек на складе нет, красить ничего не нужно, и тут нам привозят Чебурашек и говорят: “Покрасьте в один цвет”. Ну ладно, покрасим.

Индукционный переход. Покажем, как проблема окраски игрушек в $k+1$ цветов может быть сведена к меньшему числу цветов. Неформально заметим, что главным предметом беспокойства в рассуждениях, сводящих ситуацию к предположению индукции, будет численность чебурашек (они должны оставаться в большинстве).

Сначала сделаем общее замечание с точки зрения художника (работника красочного цеха). Расположим цвета в порядке возрастания разнообразий. Тогда i-й цвет должен иметь разнообразие не меньше i. Художник может минимизировать свои усилия, сделав при всех i разнообразие i-го цвета равным в точности i, причем для каждого типа игрушек, где встречается цвет i, ему достаточно покрасить лишь одну игрушку. При таком отношении к работе часть игрушек может оказаться неокрашенными. Окраску этих игрушек художник может отложить «на последний момент», причем красить их можно будет в любые имеющиеся цвета — это не приведет к нарушению требований.

Для каждого вида игрушек заведем отдельную полку, места на полке пронумерованы слева направо. На каждой полке на i-е место поставим игрушку i-го цвета (если таковая имеется). Тогда в i-м «столбце» нашего шкафа будет стоять ровно i игрушек, а в первых k столбцах — $\frac{k(k+1)}{2}$ игрушек. Неокрашенные игрушки поставим на правом краю соответствующих полок. Отдельную полку оставим для Чебурашек. После прибытия Чебурашек разместим их пока в «неокрашенной» части полки (т. е. справа), но будем рассматривать как самостоятельную группу, не смешивая в рассуждениях с неокрашенными.

Тип	1	2	3	4	…	$k-1$	k	не покрашено
Зайцы	$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$	…	…	…	$\circ$ $\circ$ $\circ$
Слоники			$\bullet$	$\bullet$	…	…	…	$\circ$ $\circ$
Ёжики		$\bullet$	$\bullet$		…	…	…	$\circ$
Медведы			$\bullet$					
Лоси				$\bullet$				
Совы				$\bullet$				
…								
Чебурашки								$\circ$ $\circ$ $\circ$ $\circ$ …

Рис. 1: Расставим игрушки по полкам

Сидящий в каждом из нас художник подсказывает: для окраски игрушек в $k+1$ цветов с выполнением условий достаточно оставить в шкафу лишь $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ игрушек: все окрашенные игрушки плюс подходящее число Чебурашек, а если этого не хватает — плюс еще подходящее число неокрашенных. Будем считать, что именно это расположение игрушек изображено на рис. 1.

Заметим, что в силу природы нашего шкафа на каждой полке стоит не более k окрашенных игрушек. А поскольку в шкафу оставлено $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ игрушек, из которых $\frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} - k$ покрашены, Чебурашки из шкафа по-прежнему представляют собой самый многочисленный (нестрого) тип игрушек, даже если не все они были помещены в шкаф.

Нам требуется покрасить игрушки из шкафа в $k+1$ цветов. Попробуем решить самую «сложную» проблему — назначим, какие игрушки будут покрашены в $(k+1)$-й цвет. Целясь в применение индукции, отнесем к $(k+1)$-му цвету игрушки, которые сейчас покрашены в k-й цвет, для этого просто переименуем на каждой полке k-е место в $(k+1)$-е — в результате на каждой полке будут места с 1-го по $(k-1)$-е, а также $(k+1)$-е, ну и еще правая часть полки для неокрашенных игрушек. Теперь у нас уже имеется k игрушек для покраски в $(k+1)$-й цвет, нужна еще одна.

Прежде всего, если на какой-то полке есть неокрашенная игрушка и нет игрушки, назначенной на покраску $(k+1)$-м цветом, то назначим к покраске в $(k+1)$-й цвет эту неокрашенную игрушку. В результате список покраски в $(k+1)$-й цвет сформирован, вне этого списка осталось $\frac{k(k+1)}{2}$ игрушек, причем для них соблюдено правило разнообразия оставшихся $(k-1)$ цветов, а Чебурашки — по-прежнему самый многочисленный тип игрушек среди оставшихся. Значит, раскраску остальных игрушек в k цветов можно выполнить по предположению индукции.

Пусть теперь неокрашенные игрушки имеются, но ни одну из них не удаётся перенести в $(k+1)$-й цвет. Тогда на всякой полке, где стоит хотя бы одна неокрашенная игрушка, имеется также свободное место (среди мест от 1 до $k-1$). Действительно, если бы это было бы не так, на такой полке до прибытия чебурашек было не меньше k игрушек, значит, чебурашек прибыло тоже не меньше k. С учетом «художественных» замечаний выше в рассматриваемой ситуации тогда вообще не должно быть неокрашенных игрушек, а имеется $\frac{k(k+1)}{2}$ покрашенных игрушек и k чебурашек и тогда рассматриваемый случай «неокрашенные игрушки имеются» не может иметь места.

Попытаемся перестроить имеющуюся раскраску. Сначала переставим полки так, чтобы полки, содержащие игрушки, назначенные на покраску в $(k+1)$-й цвет, были сверху (см. рис. 2), на этих же полках будут находиться и все неокрашенные игрушки.

Тип	1	2	3	4	…	$k-1$	$k+1$	не покрашено
Зайцы	●	●	×	●	…	…	●	○ ○ ○
Слоники			●	●	…	…	●	○ ○
Ёжики		●	●		…	…	●	○
…	…					…	…	…
Медведы			$\underline{\bullet}$					
Лоси				●				
Совы				●				
…								
Чебурашки								○ ○ ○ ○ …

Рис. 2: Красим в $(k+1)$-й цвет.

С л у ч а й 1. На одной из верхних полок имеется неокрашенная игрушка и свободное место i (т. е. на этой полке нет игрушек i-го цвета) но при этом в одной из нижних полок в i-м столбце имеется игрушка — для примера мы отметили пустое место в третьем столбце строки «зайцы» и подчеркнули занятое место в строке «медведы» (рис. 2). Тогда перестроим раскраску: покрасим неокрашенную игрушку с верхней полки в i-й цвет, а игрушку i-го цвета с нижней полки обесцветим и отнесем к $(k+1)$-му цвету (рис. 3). В результате мы снова имеем возможность применить предположение индукции.

Тип	1	2	3	4	…	$k-1$	$k+1$	не покрашено
Зайцы	●	●	●	●	…	…	●	○ ○
Слоники			●	●	…	…	●	○ ○
Ёжики		●	●		…	…	●	○
…	…					…	…	…
Медведы			$\underline{\ }$				●	
Лоси				●				
Совы				●				
…								
Чебурашки								○ ○ ○ ○ …

Рис. 3: Красим в $(k+1)$-й цвет.

С л у ч а й 2 (противоположный первому случаю). Для каждого свободного места на каждой верхней полке все места на нижних полках в этом столбце заняты. Этот означает, что самые многочисленный тип игрушек (кроме чебурашек) находится в верхней части таблицы. Тогда назначим одного чебурашку к покраске в $(k+1)$-й цвет. Так как в верхней части таблицы в каждой строке имеется игрушка, назначенная к покраске в $(k+1)$-й цвет, после удаления игрушек, которые отнесены к $(k+1)$-му цвету, мы получаем ситуацию в которой выполнено предположение индукции (имеется и разнообразие цветов, и доминирование чебурашек).