МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА–2024» (математика)

Первый день

Якутск 2024

Сборник содержит задачи XXXI Международной олимпиады школьников «Туймаада» по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: С. Л. Берлов, А. С. Голованов, К. П. Кохась, Ю. В. Кузьменко, Ф. В. Петров, А. Д. Терёшин, И. И. Фролов, Д. Ю. Ширяев. Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

Старшая лига

1. Докажите, что натуральное число вида n^4+1 может иметь больше 1000 делителей вида a^4+1 с натуральными a. (*А. Голованов*)

2. Чип и Дейл играют на доске 100×100. В начале игры в левом верхнем углу доски стоит король. За один ход нужно передвинуть короля на одну клетку вправо, вниз, или по диагонали вправо вниз. При этом запрещается делать ход в том же направлении, в котором только что походил соперник. Ходят по очереди, первый ход делает Чип. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре? (*Д. Ширяев, О. Бадажкова*)

3. В строку по возрастанию все выписаны натуральные числа, которые являются точными квадратами или удвоенными точными квадратами. Обозначим n-е число в строке через $f(n)$. (Например, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 8$.) Существует ли такое натуральное n, что все числа

$$f(n), \quad f(2n), \quad f(3n), \quad \ldots, \quad f(10n^2)$$

— точные квадраты? (*Ф. Петров*)

4. Дан треугольник ABC. Отрезок, соединяющий точки касания вневписанных окружностей со сторонами AB и AC, пересекает биссектрису угла C в точке X. Отрезок, соединяющий точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC и AC, пересекает биссектрису угла A в точке Y. Докажите, что середина отрезка XY равноудалена от точек A и C. (*И. Фролов*)

Младшая лига

1. *Треугольные числа* — это числа вида $1+2+\ldots+n$ с натуральным n, то есть $1, 3, 6, 10, \ldots$. Найдите наибольшее нетреугольное натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы различных треугольных чисел.

(*А. Голованов*)

2. Будем называть *ёжиком* граф, в котором одна вершина соединена со всеми остальными и других ребер нет; количество вершин этого графа будем называть *размером* ёжика. Дан граф G на n вершинах (где $n > 1$). Для каждого ребра e обозначим через $s(e)$ размер максимального ёжика в графе G, который содержит это ребро. Докажите неравенство (суммирование ведётся по всем ребрам графа G):

$$\sum_e \frac{1}{s(e)} \leqslant \frac{n}{2}.$$

(*D. Malec, C. Tompkins*)

3. Три спортсмена бегали с различными постоянными скоростями по дорожке длиной 1. Они одновременно начали движение в одном конце дорожки. Добежав до одного из концов дорожки, спортсмен немедленно разворачивался и продолжал бег в противоположном направлении. Через некоторое время все три спортсмена встретились на старте и закончили тренировку. При каком наибольшем S можно заведомо утверждать, что в какой-то момент сумма попарных расстояний между спортсменами была не менее S? (*А. Голованов, И. Рубанов*)

4. Дан неравнобедренный треугольник ABC, точки N и M — середины AB и BC соответственно. Биссектриса угла B пересекает отрезок MN в точке E. Точка H — основание высоты из точки B в треугольнике ABC. Точка T на описанной окружности треугольника ABC такова, что описанные окружности TMN и ABC касаются. Докажите, что точки T, H, E, B лежат на одной окружности.

(*М. Юматов*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Старшая лига

1. Первое решение. Для каждого натурального a существует такое натуральное $b > a$, что $(b^4+1) \vdots (a^4+1)$. Действительно, если $b \equiv a \pmod{a^4+1}$ (например, $b = a^4+a+1$), то $b^4 \equiv a^4 \equiv -1 \pmod{a^4+1}$.

Пользуясь этим соображением, можно построить возрастающую последовательность натуральных чисел $a_0, a_1, \ldots$, в которой a_{i+1}^4+1 будет делиться на a_i^4+1 при каждом i. Тогда, очевидно, у числа a_n^4+1 будет не менее n делителей требуемого вида.

Второе решение. Возьмем произвольное $a > 1$ и построим последовательность (a_k), пользуясь рекуррентной формулой

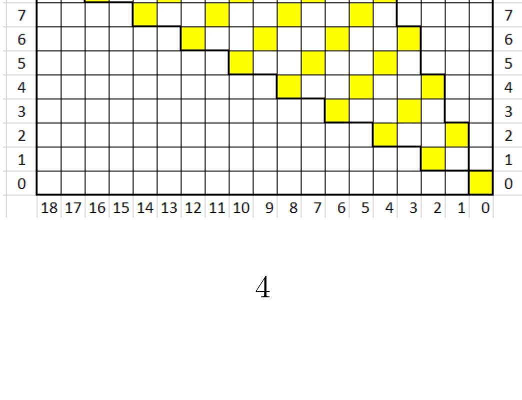
$$a_1 = a^4+1, \qquad a_{k+1} = (a_1a_2\cdots a_k)^4+1, \quad k = 1, 2, \ldots, 1000.$$

Тогда любые два числа a_i и a_j взаимно просты (при $i \neq j$) и для каждого a_i сравнение $x^4 \equiv -1 \pmod{a_i}$ имеет хотя бы одно решение, обозначим его x_i. Теперь в качестве числа n можно взять натуральное число, удовлетворяющее системе сравнений

$$n \equiv x_i \pmod{a_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 1001.$$

Оно существует по китайской теореме об остатках.

2. Ответ: выигрывает Дейл.



Пронумеруем строки и столбцы от 0 до 99 справа налево и снизу вверх (т. е. стартуем в клетке $(99,99)$). Назовем *хорошими* клетки (a,b), у которых $a+b$ кратно 3 и $a \leqslant 2b$, и $b \leqslant 2a$; в частности, $(0,0)$ и $(99,99)$ хорошие. Хорошие клетки удобно себе представлять как клетки, получаемые из клетки $(0,0)$ всевозможными ходами коня влево-вверх.

Предъявим выигрышную стратегию Дейла. Каждым ходом Чип будет уходить с хорошей клетки, а Дейл ответным ходом будет стараться вернуться на хорошую клетку; для этого на диагональный ход нужно отвечать вертикальным или горизонтальным (выбирая тот, который приближает нас к диагонали (x,x)), а на вертикальный/горизонтальный — диагональным. Если Дейл сможет действовать по этой стратегии, то неминуемо выиграет, так как только он может оказаться в хорошей клетке $(0,0)$.

Единственная ситуация, в которой Дейлу не удастся придерживаться своей стратегии, возникнет тогда, когда из клетки $(a,2a)$ Чип пойдет вправо на клетку $(a-1,2a)$ (и аналогично, если он с клетки $(2a,a)$ пойдет вниз на клетку $(2a,a-1)$). В этом случае Дейлу нужно сменить стратегию: с этого момента всегда отвечать ходом вниз (и во втором случае, аналогично, всегда ходом вправо). При этом король всегда будет оставаться в областях $2a<b$ (или $2b<a$), и у Дейла всегда будет ход.

3. О т в е т: нет.

Очевидно, $n=1$ условию задачи не удовлетворяет, поэтому будем считать, что $n>1$.

Пусть $f(n)$ — точный квадрат, и среди первых n чисел, выписанных в строку, имеется u квадратов и v удвоенных квадратов, т. е. $n=u+v$, где $2v^2<u^2<2(v+1)^2$. Рассмотрим величину $\varepsilon=u-v\sqrt{2}$. Поскольку $v\sqrt{2}<u<(v+1)\sqrt{2}$, имеем $0<\varepsilon<\sqrt{2}$.

С л у ч а й 1. Пусть $\varepsilon<1$. Рассмотрим наименьшее натуральное k, для которого $k\varepsilon>\sqrt{2}$ — очевидно, для него $k\varepsilon<\sqrt{2}+1$. Имеем

$$ku>(kv+1)\sqrt{2}=k(u-\varepsilon)+\sqrt{2}>ku-1,$$

то есть $(ku)^2>2(kv+1)^2>(ku-1)^2$, следовательно,

$$f(kn)=f(kv+1+ku-1)=2(kv+1)^2$$

— не точный квадрат. При этом

$$\varepsilon=u-v\sqrt{2}=\frac{u^2-2v^2}{u+v\sqrt{2}}\geqslant\frac{1}{u+v\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{2}(u+v)}=\frac{1}{n\sqrt{2}},$$

следовательно, $k < 2n$, и n условию задачи не удовлетворяет.

С л у ч а й 2. Пусть теперь $\varepsilon > 1$ (очевидно, случай $\varepsilon = 1$ невозможен). При этом

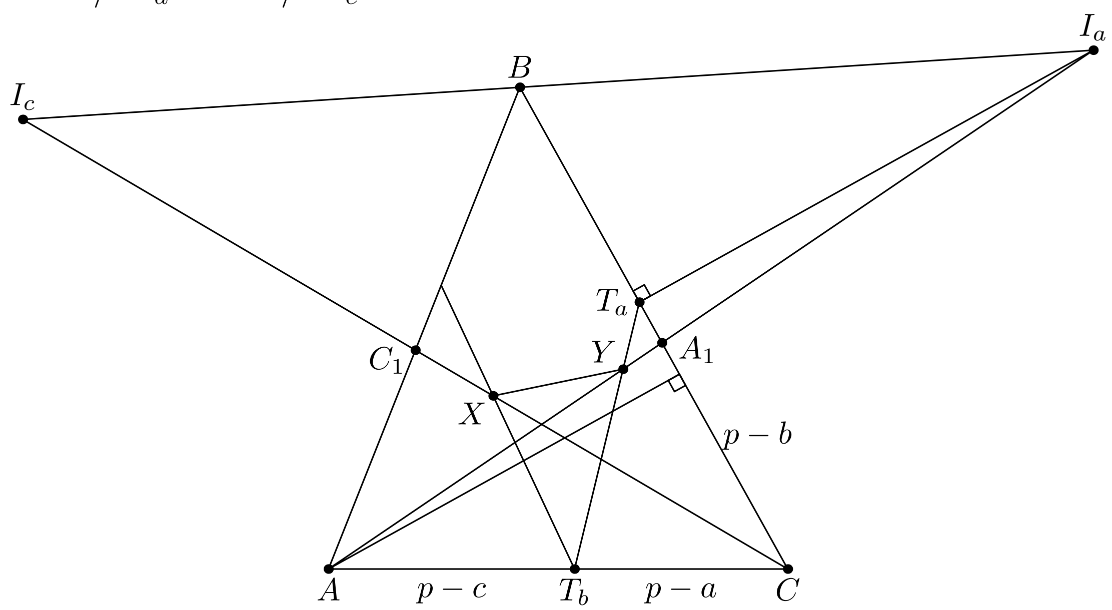
$$(2v+1)\sqrt{2} < 2u < (2v+2)\sqrt{2}.$$

Поскольку $f(2n) = f(2u+2v)$ — точный квадрат, $f(2n) = (2u-1)^2$, следовательно, $2u - 1 > (2v+1)\sqrt{2}$. При этом

$$(2u-1) - (2v+1)\sqrt{2} = 2(u - v\sqrt{2}) - 1 - \sqrt{2} < \sqrt{2} - 1 < 1.$$

Таким образом, к числу $2n$ применимо рассуждение случая 1, откуда заключаем, что среди чисел $f(2n)$, $f(4n)$, $\ldots$, $f(4n^2)$ есть число, не являющееся точным квадратом.

4. Пусть I_a, I_c — центры соответствующих вневписанных окружностей; A_1 и C_1 — основания соответствующих биссектрис. Мы воспользуемся известным утверждением (внешняя лемма о трезубце, или лемма Мансиона): середина отрезка I_aI_c равноудалена от точек A и C, то есть лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Для доказательства коллинеарности середин отрезков AC, XY и I_aI_c проверим, что $AY/AI_a = CX/CI_c$.



Обозначим через a, b, c и p соответствующие стороны треугольника ABC и его полупериметр. Точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC и AC назовём T_a и T_b соответственно. Тогда $AT_b = p - c$, $CT_b = p - a$ и $CT_a = p - b$. А из свойства биссектрисы легко найти $CA_1 = \frac{ab}{b+c}$. Таким образом, по теореме Менелая для треугольника AA_1C находим

$$\frac{AY}{YA_1}=\frac{AT_b}{T_bC}\cdot\frac{CT_a}{T_aA_1}=\frac{p-c}{p-a}\cdot\frac{p-b}{p-b-\frac{ab}{b+c}}=$$
$$=\frac{a+b-c}{b+c-a}\cdot\frac{(a+c-b)(b+c)}{(a+c-b)(b+c)-2ab}=\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c)}{(b+c-a)(a+b+c)(c-b)}.$$

Тогда

$$\frac{AY}{AA_1}=\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c)}{(b+c-a)(a+b+c)(c-b)+(a+b-c)(a+c-b)(b+c)}=$$
$$=\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c)}{2b(a^2+c^2-b^2)}.$$

Теперь найдём $\frac{AA_1}{AI_a}$. Опустим перпендикуляры из точек A и I_a на BC, они будут являться соответственно высотой h_a и радиусом вневписанной окружности r_a, которые вычисляются через площадь треугольника так: $h_a=\frac{2S}{a}$, $r_a=\frac{2S}{b+c-a}$. Получаем

$$\frac{AA_1}{AI_a}=\frac{h_a}{h_a+r_a}=\frac{\frac{2S}{a}}{\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b+c-a}}=\frac{b+c-a}{b+c}.$$

Итого

$$\frac{AY}{AI_a}=\frac{AY}{AA_1}\cdot\frac{AA_1}{AI_a}=\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2b(a^2+c^2-b^2)},$$

это выражение симметрично относительно a и c, поэтому той же величине равно отношение $\frac{CX}{CI_c}$. Таким образом, задача решена.

Младшая лига

1. Ответ: 33.

Треугольные числа, не превосходящие 33, суть 1, 3, 6, 10, 15, 21 и 28. Сумма первых пяти меньше 33, поэтому для представления 33 нужно использовать 21 или 28. Но если использовать 28, остальными треугольными числами нужно набрать 5, что невозможно. А если использовано 21, сумма остальных должна быть 12, а получить 12 нельзя ни с использованием 10 (остаётся 2), ни без использования 10 (сумма оставшихся треугольных чисел меньше 12).

В дальнейшем мы будем обозначать t_n треугольное число $\frac{n(n+1)}{2}$.

Докажем, что все числа, большие 33, представляются в требуемом виде. Для этого мы установим, во-первых, что можно представить все числа от 34 до 78, используя слагаемые, не большие 36, а во-вторых, индукцией по $n \geqslant 9$ — что можно представить все числа от 34 до $78 + t_9 + \ldots + t_n$ слагаемыми, не превосходящими t_n. Поскольку число $78 + t_9 + \ldots + t_n$ может быть сколь угодно велико, этого достаточно.

Все числа от 9 до 22, кроме 12, можно набрать треугольными числами, не большими 15: $9 = 6 + 3$, $10 = 10$, $11 = 10 + 1$, $13 = 10 + 3$, $14 = 10 + 3 + 1$, $15 = 15$, $16 = 10 + 6$, $17 = 10 + 6 + 1$, $18 = 15 + 3$, $19 = 15 + 3 + 1$, $20 = 10 + 6 + 3 + 1$, $21 = 15 + 6$, $22 = 15 + 6 + 1$.

Прибавляя к этим числам 21, получаем представления всех чисел от 30 до 43, кроме 33, слагаемыми, не большими 21.

Добавляя 28 к полученным числам от 16 до 43, получаем все числа от 44 до 71, кроме 51 и 61.

Числа 51 и 61 представляются так: $51 = 36 + 15 + 10$, $61 = 36 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1$. Первое из наших утверждений доказано.

Для доказательства второго утверждения прибавим к уже представленным числам от 34 до 78 число $t_9 = 45$, получатся числа от 79 до $78 + t_9 = 123$.

Пусть числа от 34 до $78 + t_9 + \ldots + t_n$ составлены из слагаемых, не превосходящими t_n. Добавив t_{n+1}, получим все числа от $34 + t_{n+1}$ до $78 + t_9 + \ldots + t_{n+1}$. Числовой промежуток от 34 до $78 + t_9 + \ldots + t_n$ и промежуток от $34 + t_{n+1}$ до $78 + t_9 + \ldots + t_{n+1}$ пересекаются (что нам и требовалось), поскольку $34 + t_{n+1} \leqslant 78 + t_9 + \ldots + t_n$. Действительно, вычитая из обеих частей 34 и t_n, приходим к очевидному неравенству $n + 1 \leqslant 45 + t_9 + \ldots + t_{n-1}$.

2. Для каждой вершины v найдем сумму $w(v)$ величин $\frac{1}{s(e)}$ по всем ребрам, выходящим из v. Для каждого такого ребра e, очевидно, $s(e) \geqslant \deg(v)$ и, значит,

$$w(v) \leqslant \sum_{e: v \in e} \frac{1}{\deg v} = 1.$$

Тогда

$$2 \sum_e \frac{1}{s(e)} = \sum_v w(v) \leqslant n,$$

что и требуется.

3. Ответ: $\frac{8}{5}$.

Очевидно, сумма попарных расстояний между тремя спортсменами вдвое больше наибольшего из этих расстояний. Ясно также, что скорости спортсменов пропорциональны трём натуральным числам (если за всю тренировку спортсмены пробежали дорожку a, b и c раз, их скорости относятся, как числа a, b и c).

Рассмотрим сначала бег двух спортсменов.

Л е м м а. Пусть скорости двух спортсменов относятся как взаимно простые натуральные числа p и $q > p$. Тогда наибольшее расстояние между двумя спортсменами за время бега равно 1, если одно из чисел p и q чётно, и $1 - \frac{1}{q}$, если p и q нечётны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если p чётно, а q нечётно, то когда первый пробежит расстояние p, а второй расстояние q, спортсмены окажутся в разных концах дорожки, на расстоянии 1.

Пусть p и q нечётны. Заметим, что на каждом промежутке между двумя моментами, когда один из спортсменов находится в конце дорожки, оба спортсмена движутся с постоянными скоростями, не меняя направления, поэтому расстояние между ними максимально в одном из концов этого промежутка. Если в одном из концов дорожки находится первый спортсмен, он пробежал целое расстояние n. Тогда второй спортсмен пробежал расстояние $\frac{nq}{p}$. Это число — дробь со знаменателем p. Целым оно может быть только в случае, когда n кратно p, при этом его чётность совпадает с чётностью n. Это значит, что второй спортсмен находится там же, где и первый. Во всех остальных случаях расстояние между спортсменами меньше 1 и поэтому не более $1 - \frac{1}{p}$. Аналогично, в моменты, когда в конце дорожки находится второй спортсмен, расстояние между спортсменами не более $1 - \frac{1}{q}$.

Докажем, что в какой-то момент бега спортсмены окажутся на расстоянии $1 - \frac{1}{q}$ друг от друга. Поскольку p и q взаимно просты, существует натуральное $k \leqslant q$, удовлетворяющее сравнению

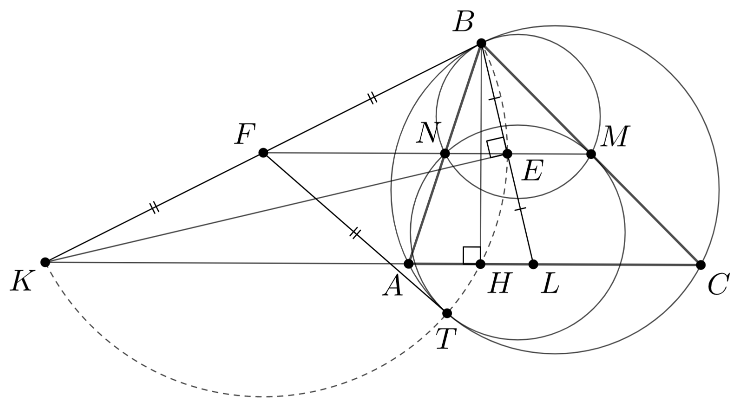
$$kp \equiv \frac{q+1}{2} \pmod q.$$

Это сравнение означает, что $kp = mq + \frac{q+1}{2}$, то есть $2kp = (2m+1)q + 1$ для некоторого целого m. Поэтому, когда быстрый спортсмен пробежит дорожку туда и обратно k раз и окажется на старте, медленный пробежит расстояние $\frac{2kp}{q} = 2m + 1 + \frac{1}{q}$, то есть окажется на расстоянии $\frac{1}{q}$ от дальнего конца дорожки. Лемма доказана.

Если скорости спортсменов относятся как $1 : 3 : 5$, то в силу леммы наибольшее расстояние между первыми двумя спортсменами равно $\frac{2}{3}$, а между третьим и любым из остальных $\frac{4}{5}$. Поэтому наибольшая сумма расстояний между спортсменами равна $\frac{8}{5}$.

Из леммы видно, что наибольшее расстояние между спортсменами, скорости которых относятся как взаимно простые нечётные числа p и $q > p$, может быть меньше $\frac{4}{5}$ только при $q = 3$ (и, следовательно, $p = 1$). Но если скорость среднего спортсмена отличается от скоростей самого быстрого и самого медленного в 3 раза, то скорости самого быстрого и самого медленного отличаются в 9 раз, и в какой-то момент расстояние между ними равно $\frac{8}{9} > \frac{4}{5}$.

4. Через (XYZ) будем обозначать описанную окружность треугольника XYZ. Поскольку треугольники ABC и BMN гомотетичны с центром в точке B, окружности (ABC) и (BMN) касаются в точке B. Пусть касательные к окружности (ABC) в точках B и T пересекаются в точке F. Заметим, что эти же касательные являются соответственно касательными к окружностям (BMN) и (TMN), поэтому степени точки F относительно этих окружностей равны. Значит, точка F лежит на радикальной оси окружностей (BMN) и (TMN) — прямой MN.



Пусть прямые BE и BF пересекают прямую AC в точках L и K соответственно. Так как MN — средняя линия треугольника ABC, точки E и F — середины отрезков BL и BK. Поскольку BK касается окружности (ABC), $\angle KBA = \angle BCA$, откуда

$$\angle KBL = \angle KBA + \angle ABL = \angle BCA + \angle CBL = \angle KLB.$$

Таким образом, треугольник KBL равнобедренный, а его медиана KE также является и высотой. Остаётся заметить, что на окружности с диаметром BK лежат все четыре точки T, H, E, B.