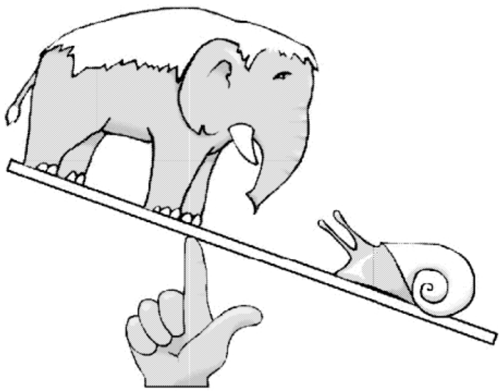
**Министерство образования и науки Республики Саха (Якутия)**
**Малая академия наук Республики Саха (Якутия)**
**Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова**

# XXXI Международная олимпиада «Туймаада»

## Физика
## Вариант 2
### Теоретический тур

**Методическое пособие (электронное издание)**



**Якутск, 3 июля — 11 июля 2024 г.**

Комплект задач подготовлен методической комиссией олимпиады «Туймаада» по физике

## Авторы задач

### Младшая лига

1. Тарнопольский Г. М.
2. Ермилов М. М.
3. Аванесян Р. Е.
4. Чудновский А. В.
5. Власов А. И.

### Старшая лига

**1.Власов А.И.**
**2.Власов А.И.**
**3.Фольклор**
**4.Фольклор**
**5.Власов А.И.**
**6.Власов А.И.**

**Общая редакция – Неустроев Е.П.**
**Оформление и верстка – Боякинов Е.Ф.**
**Ответственный за комплект задач – Неустроев Е.П.**

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система LaTeX $2_\varepsilon$.

Подписано в печать 01.07.2024 в 22:20.
677016, г. Якутск, ул. Белинского, д. 58
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

# XXXI Международная олимпиада «Туймаада»

Ежегодно в июле в столице Республики Саха (Якутия) — городе Якутск — проходит Международная олимпиада школьников «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии. Олимпиаду организует Министерство образования и науки РС (Якутия) на базе Малой академии наук РС (Якутия). В разные годы в олимпиаде принимали участие школьники из Азербайджана, Бельгии, Болгарии, Германии, Казахстана, Китая, Кыргызстана, Мексики, Монголии, Румынии, США, Таиланда,Турции, Франции, Южной Кореи и, конечно, из разных регионов России, включая Москву, Санкт-Петербург, Челябинск и другие города. Также в «Туймааде» регулярно участвуют члены сборной России и призёры заключительного этапа Всероссийских олимпиад.

Согласно действующему положению олимпиада по физике включает в себя две лиги: старшую и младшую. К участию в младшей лиге допускаются школьники, окончившие не более 9 классов среднего учебного заведения; к участию в старшей лиге допускаются все школьники. Задачи старшей лиги по программе и сложности соответствуют Международной физической олимпиаде, а задачи младшей лиги — 9 классу Всероссийской олимпиады.

---

# XXXI International olympiad "Tuymaada"

Every year in July in the capital of the Republic of Sakha (Yakutia), the city Yakutsk, the International School Physics, Mathematics, Informatics and Chemistry Olympiad «Tuymaada» takes place. The Olympiad is organized by the Republic Sakha's (Yakutia) Department of Education and North-Eastern Federal University n.a. M.K. Ammosov on the base of the physico-mathematical forum «Lensky District». In different years students from Azerbaijan, Belgium, Bulgaria, China, France, Germany, Kazakhstan, Kyrgyzstan, Mexico, Mongolia, Romania, South Korea, Thailand, Turkey, the USA and, of course, from different regions of Russia, including Moscow, Saint-Petersburg, Chelyabinsk and other cities, took part in the Olympiad. Also members of Russian national team and prizewinners of final stage of All-Russian Olympiads regularly participate in «Tuymaada».

According to current regulations, Physics Olympiad includes two leagues: senior league and junior league. Schoolchildren are allowed to participate in the junior league, graduated from no more than 9 classes of a secondary educational institution; all students are eligible to participate in the senior league. Senior league problems correspond in programm and difficulty to those of International Physics Olympiad, junior league problems — to those of 9th class of All-Russian Olympiad.



## Младшая лига

### Задача 1. Муравей на глобусе

Муравей отправился в «кругосветное» путешествие по глобусу радиусом $R$ из некоторой точки на экваторе, двигаясь со скоростью $V$ на северо-восток, пока это возможно. Где и через какое время муравей вынужденно остановится?

### Задача 2. Пушка на склоне

Стоящая на наклонной плоскости пушка может поразить цель, находящуюся не далее чем на расстоянии $R_1$ вниз по склону и не далее чем на расстоянии $R_2$ вверх по склону. Какова предельная дальность $L$ стрельбы этой пушки на горизонтальной плоскости? Сопротивление воздуха не учитывайте.

### Задача 3. Наполнение бассейна

Бассейн наполняется несколькими одинаковыми кранами, расположенными на дне, и хорошо перемешивается, а избыточная вода переливается через край и утекает. Если из $n_1$ кранов поступает вода при температуре $T_1$, а из $n_2$ — при температуре $T_2$, то в бассейне устанавливается температура $T$. Какая температура $T'$ установится в бассейне, если из $n_1'$ кранов будет поступать вода при температуре $T_1$, а из $n_2'$ — при температуре $T_2$? Температура окружающей среды остаётся постоянной и равной $T_0$.

### Задача 4. Фрактальная схема

Электрическая цепь из одинаковых резисторов сопротивлением $R$ собрана по следующей текстовой инструкции:
1) три последовательно соединённых резистора подключить к выводам $A$ и $B$;
2) параллельно каждому из подключенных на предыдущем шаге резисторов подключить ещё три последовательно соединённых между собой резистора;
3) параллельно каждому из подключенных на предыдущем шаге резисторов подключить ещё три последовательно соединённых между собой резистора;
— и так далее до бесконечности (тексты всех пунктов, начиная со второго, полностью идентичны друг другу).

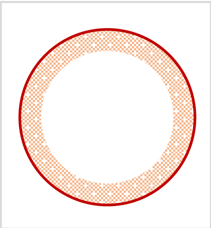
Найдите общее сопротивление $R_0$ между выводами $A$ и $B$.

### Задача 5. Испаряющаяся оптика

Тонкостенная прозрачная пробирка, состоящая из цилиндрической части высотой $H$ и полусферической части радиусом $R$, установлена вертикально открытым концом вверх и заполнена водой, уровень которой из-за испарения понижается с постоянной скоростью $v$. В рассматриваемый момент времени уровень воды опустился до нижнего края цилиндрической части пробирки. На оси симметрии пробирки на уровне её верхнего края удерживают точечный источник света. Где находится и с какой скоростью движется его изображение, если наблюдатель расположен на оси симметрии пробирки на большом расстоянии ниже неё? Показатель преломления воды $n$ известен.

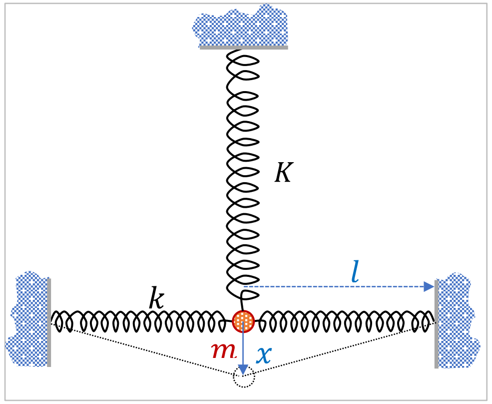
## Старшая лига

### Задача 1. Ялмез



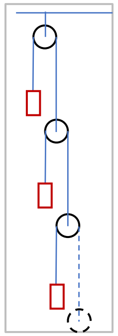
Говорят, что где-то (не говорят где, но, наверное, в тридевятой галактике), есть планета точь-в-точь похожая на Землю (да не Земля). Размер тот же, и масса та же, и «яблоко Ньютона» копирует падение на голову гения. А вот если копнуть поглубже, так вот вам и пожалуйста: внутри пусто. Зачастили на эту диковину учёные. Измеряют, просвечивают и простукивают. Толщина то оказалась всего ничего – 1 км. Плотность той «Ялмез» (так кличут свою планету тамошние аборигены) умопомрачительная. Вот по этой присказке определите гравитационное давление, под которым находится вещество планеты.

### Задача 2. Крест




Определите период малых вертикальных колебаний в системе, представленной на рисунке. В положении равновесия горизонтальные пружины не деформированы. Все данные системы: $(m, k, K, l)$ представлены на рисунке. Все пружины считать невесомыми. Найдите решение задачи при условии $k \ll K$.

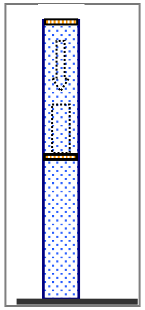
### Задача 3. Бесконечность



Имеется бесконечная однородная блоковая система (смотри рисунок, блоки и веревки невесомые, трение отсутствует). Первоначально систему удерживают в равновесии. В некоторый момент времени систему освобождают. С каким ускорением начинает движение груз первого блока?



### Задача 4. Физика в бане



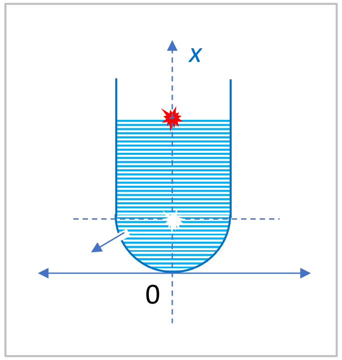
В парилке при температуре 80 °C относительная влажность воздуха равна 60%. Длинный цилиндр с «пробой» влажного воздуха из парилки закрывают легким поршнем и ставят цилиндр в вертикальном положении на стол.

Определите массу гири, которую нужно «аккуратно» поставить на поршень, чтобы он опустился до середины высоты цилиндра (эксперимент проводится в парилке). Трением поршня о стенки цилиндра пренебречь. Стенки цилиндра хорошо проводят тепло. Площадь поршня цилиндра равна 10 см$^2$. Давление насыщенных паров воды при 80° C равно $4{,}7359 \cdot 10^4$ Па. Атмосферное давление считать равным $10^5$ Па. Вычисления проведите с точностью до четырех «значащих» цифр. Ускорение свободного падения принять равным10 м/с$^2$.

### Задача 5. Раздвигаем и измеряем

В идеальном электромагнитном контуре с параметрами $L$ и $C$ происходят колебания с амплитудой тока $i_0$. Пластины конденсатора контура начинают раздвигать с очень малым ускорением $a$. Определите амплитуду напряжения на конденсаторе к моменту времени $t$. Площадь пластин конденсатора $S$.

### Задача 6. Оптика худого сосуда




Тонкостенный стеклянный сосуд с полусферическим дном радиуса $R$ частично заполнен водой. На поверхности воды (в центре, на оси вертикальной симметрии) «плавает» точечный источник света. Уровень воды очень медленно опускается из-за утечки через небольшое отверстие в стенке сосуда. «Расход» воды постоянный (так «устроено» отверстие) и равен $\frac{dm}{dt} = -\mu$. Определите координату изображения источника и его скорость движения в момент, когда уровень воды совпадёт с плоскостью полусферы (будет находится на расстоянии $R$ от дна сосуда). Наблюдатель находится на оси симметрии пробирки на большом расстоянии ниже её. Плотность воды $\rho$, показатель преломления $n = 4/3$.

# Возможные решения

## Младшая лига

### Задача 1. Муравей на глобусе

Муравей вынужденно остановится, когда окажется на северном полюсе, так как нет никакой ещё более северной точки. Движение муравья на северо-восток означает, что проекции его скорости на север и восток равны между собой и имеют значение $v = V\sqrt{2}/2$. Расстояние вдоль меридиана от любой точки на экваторе до северного полюса составляет четверть длины экватора и потому имеет вид $S = \pi R/2$. Отсюда находим время путешествия:

$$T = \frac{S}{v} = \frac{\pi R}{V\sqrt{2}}.$$

### Задача 2. Пушка на склоне

Сперва выведем общую формулу для минимальной начальной скорости $v_0$ снаряда, при которой он может достичь заданной точки. Пусть начало системы координат совпадает с положением пушки, ось $x$ направлена горизонтально в плоскости полёта снаряда, а ось $y$ — вертикально, тогда закон движения снаряда, выпущенного под углом $\varphi$ к горизонту, имеет вид

$$x(t) = v_0 \cos\varphi \cdot t, \qquad y(t) = v_0 \sin\varphi \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

откуда после исключения времени $t$ и применения основного тригонометрического тождества получаем формулу для траектории:

$$y(x) = x \operatorname{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\varphi} = x \operatorname{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot (\operatorname{tg}^2\varphi + 1).$$

Рассмотрим это равенство как квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\varphi$:

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \operatorname{tg}^2\varphi - x \operatorname{tg}\varphi + \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) = 0. \tag{1}$$

Точка с координатами $(x; y)$ достижима тогда и только тогда, когда существует угол $\varphi$, то есть уравнение (1) имеет решение, что проверяется через условие только на дискриминант

$$D = x^2 - 4 \cdot \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) \geqslant 0, \tag{2}$$



так как функция $\operatorname{tg}\varphi$ (в отличие от синуса и косинуса) может принимать любые действительные значения и потому любое решение квадратного уравнения даст годное значение угла $\varphi$. Решая неравенство (2), получаем условие

$$v_0^2 \geqslant g\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right). \tag{3}$$

Выразим расстояние $R$ от пушки до целевой точки по теореме Пифагора в виде $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, заменим $y$ на более осмысленную величину $H$ — высоту целевой точки над уровнем пушки, а также вспомним, что мы искали минимальную скорость $v_0$, после чего неравенство (3) превращается в уравнение

$$v_0^2 = g(H + R). \tag{4}$$

**Примечание.** В таком виде формулу (4) очень легко и полезно запомнить, так как она часто встречается в задачах разных олимпиад, например, три года назад у нас была внешне совсем другая задача, которая, однако, успешно решалась с помощью этой же формулы. В решении той задачи мы использовали другой способ доказательства — предлагаем читателям сравнить решения и сделать выводы о достоинствах каждого подхода, а заодно подумать, как связано значение $D$ с существованием настильной и навесной траекторий.

Теперь применим выведенную общую формулу (4) для крайних достижимых точек на наклонной плоскости в исходной задаче:

$$v_0^2 = gR_1(1 - \sin\alpha), \qquad v_0^2 = gR_2(1 + \sin\alpha), \tag{5}$$

где $\alpha$ — угол наклона плоскости. Из уравнений (5) выражаем скорость:

$$v_0^2 = g \cdot \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Искомую дальность $L$ найдём, подставив в формулу (4) нулевую высоту:

$$L = \frac{v_0^2}{g} = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}. \tag{6}$$

**Примечание.** Стоит выработать привычку проверять каждый общий результат по размерности и на частные случаи, например, здесь можно увидеть, что если наклонная плоскость окажется горизонтальной, то $R_1$, $R_2$ и $L$ будут равны между собой и уравнение (6) ожидаемо превратится в тождество.

### Задача 3. Наполнение бассейна

Пусть $c$ — удельная теплоёмкость воды, $\mu$ — расход воды (кг/с) через один кран, $k$ — коэффициент пропорциональности между мощностью теплопотерь и разностью температур бассейна и окружающей среды, тогда уравнения теплового баланса (в единицах мощности) для двух случаев будут иметь вид

$$n_1 c\mu(T_1 - T) + n_2 c\mu(T_2 - T) = k(T - T_0),$$

$$n'_1 c\mu(T_1 - T') + n'_2 c\mu(T_2 - T') = k(T' - T_0),$$

где выражения слева имеют смысл «прибыли тепла» за счёт замены воды при установившейся температуре на воду из крана. После деления второго уравнения на первое все размерные коэффициенты сокращаются и мы получаем линейное уравнение относительно искомой температуры:

$$\frac{n'_1(T_1 - T') + n'_2(T_2 - T')}{n_1(T_1 - T) + n_2(T_2 - T)} = \frac{T' - T_0}{T - T_0},$$

из которого выражаем ответ:

$$T' = T + (T - T_0) \cdot \frac{(n'_1 - n_1)(T_1 - T) + (n'_2 - n_2)(T_2 - T)}{n_1(T_1 - T) + n_2(T_2 - T) + (n'_1 + n'_2)(T - T_0)}.$$

**Примечание.** Громоздкие формулы заметно повышают вероятность ошибок по невнимательности, поэтому их нужно стараться проверять на максимальное количество очевидных частных случаев. Если краны не переключали ($n'_1 = n_1$ и $n'_2 = n_2$), то ожидаемо получаем $T' = T$. Если все краны одинаковые ($T_1 = T_2$), то все $n$ ожидаемо сливаются в суммы $n_1 + n_2$ и $n'_1 + n'_2$. Если мощность теплообмена с окружающей средой очень велика (это равносильно условию $T = T_0$), то ожидаемо получаем $T' = T_0$. Предлагаем читателям найти ещё несколько подобных критериев проверки, причём не стоит забывать и про утверждения в стиле «если это увеличивается, то это уменьшается», ведь не зря же мы записали ответ для новой температуры в виде суммы старой и приращения, в котором ещё и выделили множитель $(T - T_0)$. ☺

**Примечание.** Исходная авторская формулировка задачи была для конкретных чисел, а не для $n$ в общем виде, и кому-то может показаться, что обобщение усложнило задачу, но это не так, потому что при расчёте сразу в числах описанные выше проверки были бы недоступны, то есть ошибиться в задаче с числами можно с большей вероятностью, чем в общем виде.



### Задача 4. Фрактальная схема

Подключение одинаковых групп последовательно соединённых одинаковых резисторов параллельно каждому из последовательно соединённых одинаковых резисторов равносильно добавлению ещё одной ветви цепи, состоящей из всех новых резисторов, параллельно ветви цепи из всех исходных резисторов, в чём можно убедиться, изобразив схему и удалив перемычки, по которым не течёт ток из-за равенства потенциалов на их концах.

При бесконечном продолжении этого процесса между выводами $A$ и $B$ будут возникать всё новые ветви цепи, состоящие из последовательно соединённых резисторов, причём количество резисторов в каждой следующей ветви, начиная со второй, будет в три раза больше, чем в предыдущей.

Искомое общее сопротивление найдём, применив формулу для сопротивления параллельного соединения резисторов к группам резисторов, соединённых между собой последовательно:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{3R \cdot 3} + \frac{1}{3R \cdot 3^2} + ... = \frac{1}{3R} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ...\right) = \frac{1}{3R} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2R},$$

где на предпоследнем шаге была применена формула для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Отсюда получаем ответ:

$$R_0 = 2R.$$

### Задача 5. Испаряющаяся оптика

Указанное в условии положение наблюдателя сообщает нам, что нужно рассматривать изображение, создаваемое лучами, прошедшими через воду под малыми углами к оси пробирки (только у этого изображения область видимости включает в себя точку наблюдения).

**Примечание.** Для сравнения: наблюдатель, находящийся над пробиркой, увидел бы отражение источника от горизонтальной поверхности воды как в плоском зеркале, а наблюдатель, находящийся сбоку от пробирки, увидел бы изображение, создаваемое лучами, прошедшими через стенки пробирки.

Находящийся на пути этих лучей водяной полушар нельзя рассматривать как тонкую линзу, но поскольку нас интересует только его узкая сердцевина вблизи оси, остальную часть шара можно просто выкинуть, а эту сердцевину — разделить на плоскопараллельную пластину толщиной $d \approx R$ и тонкую плоско-выпуклую линзу с фокусным расстоянием $f = R/(n - 1)$.

Изображение, создаваемое плоскопараллельной пластиной, будет смещено от источника в сторону наблюдателя на расстояние

$$\Delta = d \cdot \frac{n - \mathbf{1}}{n},$$

а значит, окажется на расстоянии

$$a = H + R - \Delta = H + R - d \cdot \frac{n - 1}{n}$$

от линзы. Из формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

выразим координату изображения вдоль оси $b$, направленной вниз вдоль оси симметрии пробирки и имеющей ноль в её нижней точке, совпадающей с оптическим центром линзы:

$$b=\frac{af}{a-f}=\frac{(n(H+R)-(n-1)d)R}{n(n-1)H+n(n-2)R-(n-1)^2d}. \tag{7}$$

Положение изображения в рассматриваемый момент времени найдём с помощью подстановки $d=R$:

$$b=\frac{(nH+R)R}{n(n-1)H-R}.$$

**Примечание.** Мы не делали подстановку $d=R$ изначально и дотащили $d$ до формулы (7) из-за наличия вопроса про скорость, для ответа на который теперь можно использовать производную функции $b(d)$, а вот если бы переменная $d$ и константа $R$ изначально слились в одну букву, то такой расчёт стал бы невозможен.

Продифференцируем функцию (7) по времени:

$$\dot{b}=\frac{n(n-1)R^2\dot{d}}{(n(n-1)H+n(n-2)R-(n-1)^2d)^2}.$$

и подставим сюда текущие значения $d=R$ и $\dot{d}=-v$ (знак минус, так как уровень воды понижается):

$$\dot{b}=-\frac{n(n-1)R^2v}{(n(n-1)H-R)^2}.$$

Знак минус перед положительной дробью означает, что скорость отрицательна, то есть изображение движется вверх. Скорость становится формально бесконечной, когда изображение оказывается на бесконечности из-за пересечения предметом фокальной плоскости линзы.



## Старшая лига

### Задача 1. Ялмез

Гравитационная энергия планеты

$$U=-G\frac{M^2}{2R}$$

Методом виртуальной работы определим гравитационное сжатия (радиальное давление сжатия)

$$f\cdot 4\pi R^2\cdot dR=dU=G\frac{M^2}{2R^2}dR \quad\rightarrow\quad f=G\frac{M^2}{2R^2\cdot 4\pi R^2}$$

Сила сжатия двух полушарий

$$F=G\frac{M^2}{2R^2\cdot 4\pi R^2}\cdot\pi R^2=G\frac{M^2}{8R^2}$$

Эта сила распределена по экваториальному сечению, поэтому

$$p=\frac{F}{2\pi R\cdot\Delta R}=G\frac{M^2}{8R^2\cdot 2\pi R\cdot\Delta R}=\frac{g^2}{16\pi}\cdot\frac{R}{\Delta R\cdot G}$$

Вычислим

$$p=\frac{g^2}{16\pi}\cdot\frac{R}{\Delta R\cdot G}=\frac{9{,}81^2}{16\pi}\cdot\frac{6{,}4\cdot 10^6}{10^3\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}}\approx 1{,}84\cdot 10^{14}\ \text{Па}=1{,}84\cdot 10^9\ \text{атм}$$

История умалчивает о судьбе тех, кто впервые познал эту величину.

### Задача 2. Крест

Про гравитацию «забываем». Её наличие только смещает точку равновесия. Определяем деформацию горизонтальных пружин при небольшом смещении $x$.

$$\Delta l=l\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{l}\right)^2}-1\right)\approx\frac{x^2}{2l}$$

Записываем первый интеграл динамического уравнения – уравнение энергии.

$$m\frac{\dot{x}^2}{2}+K\frac{x^2}{2}+\frac{2k}{2}\left(\frac{x^2}{2l}\right)^2=K\frac{{x_0}^2}{2}+\frac{2k}{2}\left(\frac{{x_0}^2}{2l}\right)^2$$

Здесь $x_0$ - амплитуда колебаний. Переписываем уравнение в виде

$$\dot{x}^2=\frac{K}{m}({x_0}^2-x^2)+\frac{k}{2ml^2}({x_0}^4-x^4)$$

Стандартно переходим к безразмерным переменным: $l_0=l, t_0=\sqrt{\frac{m}{K}}, v_0=l\sqrt{\frac{K}{m}}$.

$$\dot{x}^2=({x_0}^2-x^2)+\frac{\varepsilon}{2}({x_0}^4-x^4)$$

Получаем нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка. Здесь $x = \frac{x}{x_0}$, $\varepsilon = \frac{k}{K}$.
Теперь делаем формальное предположение о малости второго слогаемого в этом уравнении (слабые горизонтальные пружины). Это даёт возможность использовать известный метод приближённого решения (метод последовательного приближения с усреднением).
Выделим в безразмерном уравнении «гармоническую» часть

$$\dot{x}^2 = ({x_0}^2 - x^2)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}({x_0}^2 + x^2)\right)$$

Решение в нулевом приближении запишем в виде

$$x(\tau) = x_0 \cdot \cos(\tau)$$

и подставим во вторую скобку основного уравнения

$$\dot{x}^2 = ({x_0}^2 - x^2)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}({x_0}^2 + {x_0}^2 \cdot cos^2(\tau))\right)$$

Вторую скобку усредняем по времени $\left(\overline{cos^2(\tau)} = \frac{1}{2}\right)$ и в результате получаем

$$\dot{x}^2 = ({x_0}^2 - x^2)\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon \cdot {x_0}^2\right)$$

Вторую скобку в правой части можно считать квадратом частоты, зависящей от амплитуды смещения и соотношения коэффициентов упругости

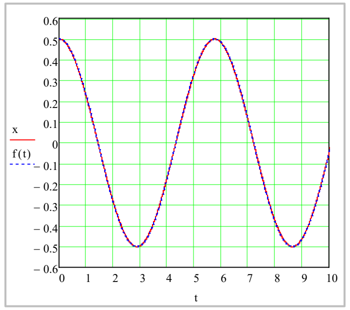
$$\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon \cdot {x_0}^2\right) = \omega(x)^2$$

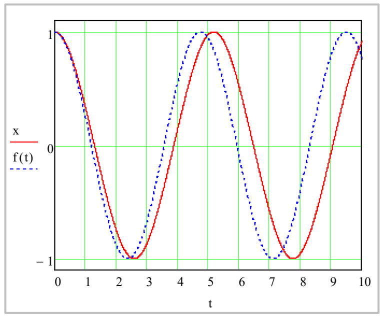
Отсюда

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{3}{4}\varepsilon \cdot {x_0}^2} = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}\varepsilon \cdot {x_0}^2}}$$

Теперь проведём компьютерную проверку полученной приближённой формулы периода колебаний, используя точное безразмерное уравнение динамики, которое записывается в виде.

$$\ddot{x} = -x - 2\varepsilon x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$$



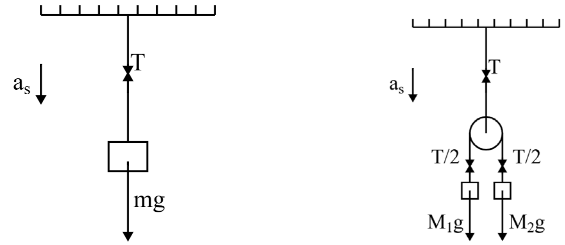






На первом графике представлен результат такой проверки. Красным цветом представлен график зависимости координаты шарика от времени при точной компьютерной реализации движения (колебания) при $\varepsilon = 1{,}0$ и $x_0 = 0{,}5$. Пунктирной линией представлен график гармонического движения с периодом, который определён приближённой формулой. На времени двух периодов графики практически совпадают. На втором графике амплитуда колебаний увеличена до $x_0 = 1{,}0$. Уже на одном периоде видно заметное расхождение точного и приближённого решений.

**Задача 3. Бесконечность**

Рассмотрим две системы двигающиеся с ускорением $a_s$ вниз




2-й закон Ньютона для первой системы:

$$ma_s = mg - T_{\text{а}}.$$

2-й закон Ньютона для второй системы:

$$\begin{cases} M_1 a_1 = M_1 g - M_1 a_s - T_{\text{б}}/2, \\ M_2 a_2 = M_2 g - M_2 a_s - T_{\text{б}}/2, \\ a_1 + a_2 = 0, \end{cases}$$

где $a_1, a_2$ – ускорение грузиков в НИСО, двигающаяся с ускорением $a_s$.

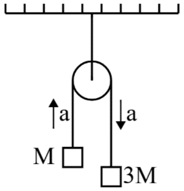
После некоторых математических преобразований получается, что при любом $a_s$ и

$$m = \frac{4M_1M_2}{M_1 + M_2},$$

натяжения верхних нитей у обоих систем равны $T_{\text{а}} = T_{\text{б}} = T$.
В задаче всю систему заменим на один груз с эквивалентной массой $M_e$, так чтобы натяжение верхней нити до и после замены не изменилось. Убрав первую ступеньку (первый грузик и первый блок), значение эквивалентной массы не поменяется. Получается уравнение:

$$M_e = \frac{4MM_e}{M + M_e},$$

После замены только правой стороны, получается задача, схема которой показана на следующем рисунке.




$$a = {}^{g}/_{2}.$$

**Задача 4. Физика в бане**

1. Без гири атмосферное давление влажного воздуха в цилиндре является суммой давлений газов, составляющих воздух, и ненасыщенных паров воды

$$p_A = p + p_i \cdot \varphi$$

2. При «нагрузке» объем системы уменьшается в два раза. Давление газов увеличивается в два раза (изотермическое сжатие), а давление паров воды становится равным давлению насыщенного пара (избыток влаги конденсируется) $p_A + \dfrac{mg}{S} = 2p + p_i$ .

3. Решаем систему уравнений и получаем $m = \dfrac{S}{g}\left(p_A - p_i\left(2\varphi - 1\right)\right)$.

4. Вычисления: $m = \dfrac{10 \cdot 10^{-4}\left(10^5 - 0{,}47359 \cdot 10^5\left(2 \cdot 0{,}6 - 1\right)\right)}{10} \approx 9{,}053$ кг.



**Задача 5. Раздвигаем и измеряем**

Для систем с периодическими процессами, в которых при внешнем воздействии происходит медленное изменение одного из параметров справедлив закон сохранения адиабатического инварианта. Для систем с гармоническими колебаниями этот инвариант можно записать в виде

$$\frac{W(x)}{\omega(x)} = inv$$

Для нашей задачи

Изменение величины ёмкости

$$C' = \varepsilon_0 \frac{S}{d + a\frac{t^2}{2}} = \frac{C}{\beta}; \quad \beta = 1 + \frac{at^2}{2d}$$

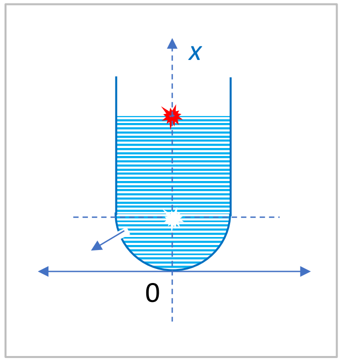
Адиабатический инвариант

$$L\frac{{i_0}^2}{2} \cdot \sqrt{LC} = \frac{C}{\beta}\frac{{u_0}^2}{2}\sqrt{L\frac{C}{\beta}}$$

После преобразования получаем амплитуду напряжения на элементах контура

$$u_0 = i_0\sqrt{\frac{L \cdot \beta\sqrt{\beta}}{C}}$$

**Задача 6. Оптика худого сосуда**




Тонкостенный стеклянный сосуд с полусферическим дном радиуса $R$ частично заполнен водой. На поверхности воды (в центре, на оси вертикальной симметрии) «плавает» точечный источник света. Уровень воды очень медленно опускается из-за утечки через небольшое отверстие в стенке сосуда. «Расход» воды постоянный (так «устроено» отверстие) и равен $\frac{dm}{dt} = -\mu$. Определите координату изображения источника и его скорость движения в момент, когда уровень воды совпадёт с плоскостью полусферы (будет находится на расстоянии $R$ от дна сосуда). Плотность воды $\rho$, показатель преломления $n = 4/3$.

Решение

«Отрезаем» тонкую линзу от дна сосуда (считаем толщину стенки равной 0). Фокусное расстояние линзы равно

$$F = \frac{R}{n-1}$$

Слой воды толщиной $x$ сдвигает изображение на величину $\Delta f = x\frac{n-1}{n}$ (по ходу лучей). Для расчёта координаты изображения используем «координатную» формулу изображения в тонкой линзе

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{F}$$

Эта формула справедлива для любой линзы (собирающей, рассеивающей). Величины подставляются в эту формулу со знаком, который они имеют в системе координат, начало которой совмещено с оптическим центром линзы.

Расстояние $d$ после сдвига водной пластиной равно $d = x - x\frac{n-1}{n} = \frac{x}{n}$. Вычисляем координату изображения (в системе координат «рабочий» фокус линзы равен $-\frac{R}{n-1}$)

$$f = \frac{d \cdot F}{d+F} = \frac{\frac{x}{n}\left(-\frac{R}{n-1}\right)}{\frac{x}{n} - \frac{R}{n-1}} = -R\frac{x}{x(n-1) - nR}$$

Скорость движения изображения определяем производной по времени

$$\frac{df}{dt} = v = -R\frac{x(n-1) - nR - (n-1)x}{(x(n-1) - nR)^2} \cdot \frac{dx}{dt} = R^2\frac{n}{(x(n-1) - nR)^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Распишем скорость движения уровня

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = -\rho\frac{dV}{dt} = -\rho \cdot \pi R^2\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{\mu}{\rho\pi R^2}$$

В итоге

$$v = R^2\frac{n}{(x(n-1) - nR)^2} \cdot \left(-\frac{\mu}{\rho\pi R^2}\right)$$

Определяем координату изображения и его скорость движения при $x = R$

$$f = R; \quad v = -n\frac{\mu}{\rho\pi R^2}$$

Подводим итоги.

Изображение мнимое ($F = \frac{R}{n-1} = 3R; d = \frac{3}{4}R$).

Координата изображения совпадает с координатой источника.

Скорость изображения направлена вниз и в $n$ раз больше скорости понижения уровня. Красивый результат, который обусловлен оптическими свойствами полусферы.