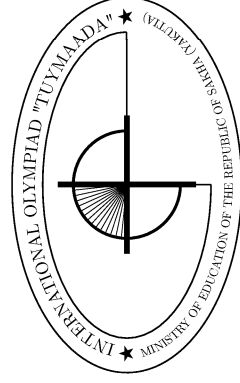


Министерство образования и науки Республики Саха (Якутия)  
Малая академия наук Республики Саха (Якутия)  
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике  
Министерства образования Республики Саха (Якутия)  
и Северо-восточного федерального университета им. М.К. Аммосова.  
Телефон: (4112) 496862.  
E-mail: achudn@mail.ru, griguyum@yandex.ru.

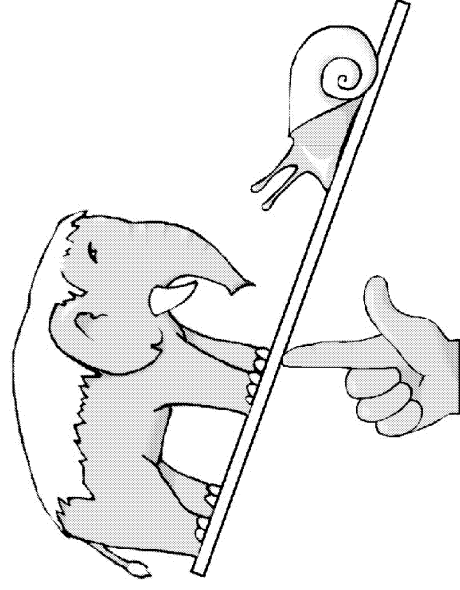
## XXX Международная олимпиада «Туймаада»



### Физика

#### Теоретический тур

Методическое пособие (электронное издание)



Якутск, 2 июля — 10 июля 2023 г.

### Авторы задач

#### Младшая лига

1. Власов А. И.
2. Копоридзе С. И.
3. Аванесян Р. Е.
4. Варламов С. Д.
5. Аванесян Р. Е.
6. Ермилов М. М.
7. Ефимов В. В.

#### Старшая лига

1. См. зад. 1 мл. лиги.
2. Акимов А. Б.
3. Власов А. И.
4. Чудновский А. В.
5. См. зад. 4 мл. лиги.
6. Варламов С. Д.,  
Ермилов М. М.
7. См. зад. 6 мл. лиги.
8. См. зад. 7 мл. лиги.

Общая редакция — Чудновский А. В.  
Оформление и верстка — Чудновский А. В.  
Ответственный за комплект задач — Григорьев Ю. М.

При подготовке оригинал-макета  
использовалась издательская система L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X<sub>2</sub>ε.

© Авторский коллектив

Подписано в печать 02.07.2023 в 19:01.

677016, г. Якутск, ул. Белинского, д. 58

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

## XXX Международная олимпиада «Туймаада»

Ежегодно в июле в столице Республики Саха (Якутия) — городе Якутск — проходит Международная олимпиада школьников «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии. Олимпиаду организует Министерство образования РС (Я) и Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова на базе физико-математического форума «Ленский край». В разные годы в олимпиаде принимали участие школьники из Азербайджана, Бельгии, Болгарии, Германии, Казахстана, Китая, Кыргызстана, Мексики, Монголии, Румынии, США, Таиланда, Турции, Франции, Южной Кореи и, конечно, из разных регионов России, включая Москву, Санкт-Петербург, Челябинск и другие города. Также в «Туймааде» регулярно участвуют члены сборной России и призёры заключительного этапа Всероссийских олимпиад.

Согласно действующему положению олимпиада по физике включает в себя две лиги: старшую и младшую. К участию в младшей лиге допускаются школьники, окончившие не более 9 классов среднего учебного заведения; к участию в старшей лиге допускаются все школьники. Задачи старшей лиги по программе и сложности соответствуют Международной физической олимпиаде, а задачи младшей лиги — 9 классу Всероссийской олимпиады.

### XXX International olympiad "Tuymaada"

Every year in July in the capital of the Republic of Sakha (Yakutia), the city Yakutsk, the International School Physics, Mathematics, Informatics and Chemistry Olympiad «Tuymaada» takes place. The Olympiad is organized by the Republic Sakha's (Yakutia) Department of Education and North-Eastern Federal University n.a. M.K. Ammosov on the base of the physico-mathematical forum «Lensky District». In different years students from Azerbaijan, Belgium, Bulgaria, China, France, Germany, Kazakhstan, Kyrgyzstan, Mexico, Mongolia, Romania, South Korea, Thailand, Turkey, the USA and, of course, from different regions of Russia, including Moscow, Saint-Petersburg, Chelyabinsk and other cities, took part in the Olympiad. Also members of Russian national team and prizewinners of final stage of All-Russian Olympiads regularly participate in «Tuymaada».

According to current regulations, Physics Olympiad includes two leagues: senior league and junior league. Schoolchildren are allowed to participate in the junior league, graduated from no more than 9 classes of a secondary educational institution; all students are eligible to participate in the senior league. Senior league problems correspond in program and difficulty to those of International Physics Olympiad, junior league problems — to those of 9th class of All-Russian Olympiad.

## Младшая лига

### Задача 1. Плоская капля

На несмачиваемой горизонтальной поверхности разлита большая (по горизонтальным размерам) капля жидкости рис. 1, имеющей плотность  $\rho$  и коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ . Найдите глубину  $H$  капли. Обозначим через  $A$  произвольную точку поверхности капли, в которой касательная плоскость вертикальна.

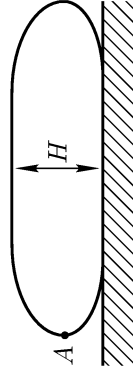


Рис. 1

1. Найдите отношение  $k$  высоты капли над уровнем точки  $A$  к глубине капли под уровнем точки  $A$ .

2. Найдите радиус кривизны  $R$  поверхности капли в точке  $A$ .

### Задача 2. Колебания на циклоиде

Маленькая бусинка может скользить вдоль закреплённой в вертикальной плоскости проволоки, имеющей форму перевернутой «вверх ногами» циклоиды, описываемой точкой на ободке колеса радиусом  $R$ , катящегося без проскальзывания по горизонтальной прямой (рис. 2). Найдите период  $T$  малых колебаний бусинки около одной из нижних точек циклоиды.

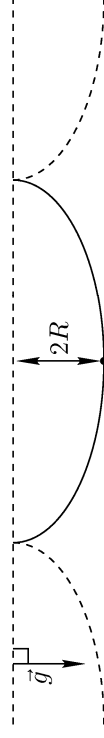


Рис. 2

### Задача 3. Переливания туда-сюда

Первый calorиметр содержит тёплую воду массой  $M = 9$  кг, а второй — холодную воду массой  $m = 3$  кг. Из первого сосуда переливают воду массой  $\mu = 1$  кг во второй, хорошо перемешивают, после чего переливают из него воду той же массой  $\mu$  обратно в первый сосуд. После  $n = 4$  таких переливаний туда-сюда температуры воды в сосудах оказались равны  $T_n = 68,75^\circ\text{C}$  и  $t_n = 52,75^\circ\text{C}$ . Найдите начальные температуры  $T_0$  и  $t_0$  воды в calorиметрах. Теплоёмкости сосудов и тепловые потери не учитывайте.

**Задача 4. Газовый тройник**

Маленький симметричный тройник соединяет три одинаковых сосуда с разреженным гелием. Все трубки тройника симметрично заполнены пористым материалом, пронизанным множеством параллельных каналов, диаметр которых много меньше длины свободного пробега молекул. В центре тройника имеется свободное от пористого материала небольшое пространство. Попадание молекулы в канал с любой стороны означает, что у молекулы есть определённая вероятность вылететь из этого канала назад через то же отверстие и дополнительная к ней вероятность вылететь через противоположное отверстие этого канала, причём эти вероятности не зависят от температуры и одинаковы для всех каналов. Изначально гелий во всех трёх сосудах имел давление  $P_0$  и некоторую одну и ту же температуру. Затем, поддерживая прежнюю температуру в первом сосуде и внутри тройника, повысили температуру во втором сосуде в два раза, а в третьем — в три раза. Какие давления  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$  установятся соответственно в трёх сосудах и в свободном пространстве внутри тройника через большое время?

**Задача 5. Заряженный треугольник**

Тонкий лист в форме треугольника  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$  и острым углом  $\angle BAC = \alpha$  равномерно заряжен и имеет потенциалы  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  соответственно в вершинах  $A$  и  $B$ . Найдите потенциалы  $\varphi_C$  и  $\varphi_D$  соответственно в вершине  $C$  и в основании  $D$  высоты  $CD$  треугольника  $ABC$ .

**Задача 6. Растекание потока**

На круглую пластину, имеющую малую толщину  $h$  и изготовленную из материала с удельным сопротивлением  $\rho$ , падает однородный поток заряженных частиц общей силой тока  $I_0$ . Цилиндрическая граница пластины заземлена и имеет нулевой потенциал. Найдите потенциал  $\varphi_0$  в центре пластины и тепловую мощность  $P_0$ , выделяющуюся в пластине.

**Задача 7. Ртутное зеркало телескопа**

Знаменитый американский физик-экспериментатор Роберт Вуд в 1908 году построил оригинальный телескоп-рефлектор. На дне колодца в одном из коровников он установил в качестве зеркала телескопа вращающееся вокруг вертикальной оси блюдце со ртутью и наблюдал звёздное небо через отверстие в крыше. С помощью такого зеркала в одном из своих опытов он получил на фотопластинке изображение Луны диаметром  $d = 3,5$  см. С какой угловой скоростью  $\omega$  в этом опыте вращалось блюдце со ртутью? Лунный диск с Земли виден под углом  $\gamma = 0,5^\circ$ . Ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

**Старшая лига****Задача 1. Плоская капля**

На несмачиваемой горизонтальной поверхности разлита большая (по горизонтальным размерам) капля жидкости рис. 3, имеющей плотность  $\rho$  и коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ . Найдите глубину  $H$  капли. Обозначим через  $A$  произвольную точку поверхности капли, в которой касательная плоскость вертикальна.

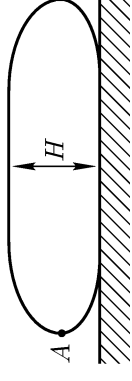


Рис. 3

1. Найдите отношение  $k$  высоты капли над уровнем точки  $A$  к глубине капли под уровнем точки  $A$ .

2. Найдите радиус кривизны  $R$  поверхности капли в точке  $A$ .

**Задача 2. Апельсинометатель**

Апельсинометатель Винтика и Шпунтика представляет собой лёгкий стержень длиной  $H$ , верхний конец которого может скользить по направляющим вдоль вертикальной стены, а нижний — по горизонтальному полу. Стержень начинает движение из вертикального положения без начальной скорости, причём Шпунтик сидит на верхнем конце, а Винтик с маленьким апельсином в руках — на нижнем. На какое максимальное расстояние  $S$  (от точки броска) Винтик сможет бросить апельсин, удачно подавав момент и угол броска? Максимальное расстояние, на которое Винтик может бросить апельсин из неподвижного состояния, равно  $L$ . Массы коротышек одинаковы. Сопровождение воздуха не учитывайте.

**Задача 3. Пружина с переменным числом витков**

Невесомая пружина имеет большое число витков, но изначально только  $N \gg 1$  витков могут деформироваться, а остальные — скреплены между собой. Груз на этой пружине совершает свободные колебания с периодом  $T_0$  и амплитудой  $A_0$ . Начиная с некоторого момента, при каждом прохождении грузом положения равновесия освобождают по одному из скреплённых витков пружины (длина пружины в недеформированном состоянии при этом не изменяется). Определите амплитуду  $A$  колебаний груза после увеличения числа свободных витков на  $\Delta N \gg 1$ . Оцените (приблизительно) время  $t$ , прошедшее с момента освобождения первого из изначально скреплённых витков до момента завершения колебаний с амплитудой  $A$ .

**Задача 4. Урановый шар**

Урановый шар теплопроводностью  $k$  и радиусом  $R$ , помещённый в поток воды при температуре  $T_0$ , облучается потоком нейтронов так, что в результате реакции деления ядер выделяется объёмная мощность  $q$ . Найдите зависимость установившейся температуры  $T$  шара от расстояния  $r$  до его центра.

### Задача 5. Газовый тройник

Маленький симметричный тройник соединяет три одинаковых сосуда с разреженным гелием. Все трубки тройника симметрично заполнены пористым материалом, пронизанным множеством параллельных каналов, диаметр которых много меньше длины свободного пробега молекул. В центре тройника имеется свободное от пористого материала небольшое пространство. Попадание молекулы в канал с любой стороны означает, что у молекулы есть определённая вероятность вылететь из этого канала назад через то же отверстие и дополнительная к ней вероятность вылететь через противоположное отверстие этого канала, причём эти вероятности не зависят от температуры и одинаковы для всех каналов. Изначально гелий во всех трёх сосудах имел давление  $P_0$  и некоторую одну и ту же температуру. Затем, поддерживая прежнюю температуру в первом сосуде и внутри тройника, повысили температуру во втором сосуде в два раза, а в третьем — в три раза. Какие давления  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$  установятся соответственно в трёх сосудах и в свободном пространстве внутри тройника через большое время?

### Задача 6. Заряженные многогранники

1. На гранях непрозрачного куба с ребром  $a$  равномерно распределены заряды  $q$ ,  $2q$ ,  $3q$ ,  $4q$ ,  $5q$  и  $6q$ , причём сумма зарядов на каждой паре противоположных граней равна  $7q$ . Найдите модуль напряжённости  $E_1$  электрического поля в центре куба.
2. По одной грани правильного тетраэдра равномерно распределён заряд с поверхностной плотностью  $\sigma_1$ , а по остальным трём граням — с поверхностной плотностью  $\sigma_2$ . Найдите модуль напряжённости  $E_2$  электрического поля в центре тетраэдра.

### Задача 7. Растекание потолка

На круглую пластину, имеющую малую толщину  $h$  и изготовленную из материала с удельным сопротивлением  $\rho$ , падает однородный поток заряженных частиц общей силой тока  $I_0$ . Цилиндрическая граница пластины заземлена и имеет нулевой потенциал. Найдите потенциал  $\varphi_0$  в центре пластины и тепловую мощность  $P_0$ , выделяющуюся в пластине.

### Задача 8. Ртутное зеркало телескопа

Знаменитый американский телескоп-рефлектор Роберт Вуд в 1908 году построил оригинальный телескоп-рефлектор. На дне колодца в одном из коровников он установил в качестве зеркала телескопа вращающееся вокруг вертикальной оси блюдо со ртутью и наблюдал звёздное небо через отверстие в крыше. С помощью такого зеркала в одном из своих опытов он получил на фотопластинке изображение Луны диаметром  $d = 3,5$  см. С какой угловой скоростью  $\omega$  в этом опыте вращалось блюдо со ртутью? Лунный диск с Земли виден под углом  $\gamma = 0,5^\circ$ . Ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

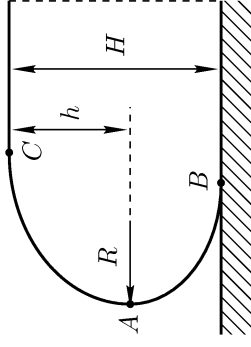
## Возможные решения

### Младшая лига

#### Задача 1. Плоская капля

Поскольку капля большая по сравнению с горизонтальными размерами, можно считать её верхнюю поверхность плоской почти везде — кроме края, который имеет вид криволинейного полуцилиндра (рис. 4). Этот край допустимо называть обобщённым цилиндром, так как периметр капли при взгляде сверху много больше радиуса кривизны края (в дальнейших расчётах мы будем использовать высоту  $L$  цилиндра, которая перпендикулярна плоскости рисунка и равна любой распрямлённой части периметра капли). Мы уточнили, что это именно полуцилиндр, так как из-за отсутствия смачивания касательная плоскость к поверхности жидкости в точке  $B$  горизонтальна и параллельна касательной плоскости в точке  $C$ . И мы подчёркнули, что этот полуцилиндр криволинейный, так как радиус кривизны поверхности изменяется вдоль кривой  $BAC$  (можно показать, что строго возрастает).

Рис. 4



Запишем условие равновесия жидкости в объёме криволинейного полуцилиндра в проекции на горизонталь (среднее гидростатическое давление  $\rho g H/2$  действует на площадь  $HL$  и компенсирует две силы поверхностного натяжения  $\sigma L$  на границах, отмеченных в точках  $B$  и  $C$  на рисунке):

$$\frac{H}{\rho g} \cdot HL = 2\sigma L,$$

откуда получаем первый ответ:

$$H = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

Аналогичным образом найдём высоту  $h$  капли над уровнем точки  $A$  (разница в том, что верхняя часть криволинейного полуцилиндра уравновешивается по горизонтали лишь одной силой поверхностного натяжения):

$$\frac{h}{\rho g} \cdot hL = \sigma L, \quad \text{откуда} \quad h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}.$$

Это выражение даёт второй ответ:

$$k = \frac{h}{H - h} = \sqrt{2} + 1.$$

Применив формулу Лапласа для добавочного давления под искривлённой (здесь цилиндрической) поверхностью в точке  $A$ , запишем уравнение

$$\frac{\sigma}{R} = \rho gh,$$

из которого получаем третий ответ:

$$R = \sqrt{\frac{\sigma}{2\rho g}}.$$

**Примечание.** Любопытно, что диаметр  $2R$  касательной окружности в точке  $A$  совпадает с высотой  $h$  столба жидкости над точкой  $A$ . Предлагаем читателям подумать над тем, случайно ли это совпадение. ☺

### Задача 2. Колебания на циклоиде

Рассмотрим катящееся без проскальзывания колесо, точка  $A$  на ободке которого проходит через нижнюю точку рассматриваемой циклоиды (рис. 5). Пусть  $v$  — скорость центра колеса, тогда в силу неподвижности точки колеса  $K$ , касающейся поверхности, все точки на ободке колеса движутся со скоростью  $v$  относительно центра, а значит, точка  $A$ , диаметрально противоположная точке касания, движется со скоростью  $2v$ . Пусть  $L$  — радиус кривизны циклоиды в нижней точке, тогда выражения для одного и того же центростремительного ускорения  $a$  точки  $A$  в исходной системе отсчёта и в инерциальной системе отсчёта центра колеса примут соответственно вид:

$$a = \frac{(2v)^2}{L} \quad \text{и} \quad a = \frac{v^2}{R},$$

откуда получаем связь

$$L = 4R.$$

**Примечание.** Обратите внимание на этот приём: для решения чисто геометрической задачи о нахождении радиуса кривизны линии в заданной точке мы провели мысленный эксперимент, позволивший вместо дифференциальных соотношений обойтись простыми формулами для движения по окружности.

Зная радиус кривизны  $L$  вблизи положения равновесия, найдём период малых колебаний по известной формуле для математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

### Задача 3. Переливания туда-сюда

Равновесную температуру  $\tau$ , которая установится в калориметрах после большого числа переливаний туда-сюда, можно выразить по закону сохранения внутренней энергии (далее отсчитываем внутреннюю энергию от состояния жидкой воды при  $0^\circ\text{C}$ ) через температуры в сосудах после любого числа  $k$  переливаний:

$$cMT_k + cnt_k = c(M + m)\tau,$$

где использована формула для внутренней энергии, предполагающая выбор нуля в состоянии жидкой воды при  $0^\circ\text{C}$ . Выразим отсюда  $\tau$  двумя способами: подстановка  $k = n$  даёт возможность явного вычисления

$$\tau = \frac{MT_n + mt_n}{M + m} = 64,75^\circ\text{C},$$

а подстановка  $k = 0$  даёт базу для последующих выражений в общем виде:

$$\tau = \frac{MT_0 + mt_0}{M + m}.$$

**Примечание.** Обратите внимание на сходство полученного уравнения с формулой для координаты центра масс системы из двух материальных точек, если вместо температур подставить координаты. Это не случайное совпадение, а пример интересной телломеханической аналогии: предлагаем читателям решить всю эту задачу через условия равновесия качелей.

Применим закон сохранения энергии для первого переливания «туда»:

$$cnt_0 + c\mu T_0 = c(m + \mu)t_1,$$

откуда найдём температуру холодной воды после первого переливания:

$$t_1 = t_0 + \frac{\mu(T_0 - t_0)}{m + \mu}. \quad (1)$$

Применим закон сохранения энергии для первого переливания «обратно»:

$$c(M - \mu)T_0 + c\mu t_1 = cMT_1,$$

откуда найдём температуру тёплой воды после первого переливания:

$$T_1 = T_0 - \frac{m\mu(T_0 - t_0)}{M(m + \mu)}. \quad (2)$$

**Примечание.** Когда приходится делать длинные алгебраические преобразования, повышающие вероятность случайной ошибки, очень помогает проверка промежуточных общих результатов на частные случаи. Например, формулы (1) и (2) дают ожидаемый результат (сохранение обеих температур), если

$T_0 = t_0$  (равновесие есть изначально) или если  $\mu = 0$  (нет переливания). Кроме того, в случае  $m = 0$  они дают ожидаемый нагрев этой бесконечно малой массы холодной воды до равновесной температуры  $T_0$  за одно переливание.

Теперь найдём отличия упомянутых выше температур от равновесной:

$$\Delta t_1 = \tau - t_1 = \frac{m(M - \mu)(T_0 - t_0)}{(M + m)(m + \mu)},$$

$$\Delta t_0 = \tau - t_0 = \frac{M(T_0 - t_0)}{M + m},$$

$$\Delta T_1 = T_1 - \tau = \frac{m^2(M - \mu)(T_0 - t_0)}{M(M + m)(m + \mu)},$$

$$\Delta T_0 = T_0 - \tau = \frac{m(T_0 - t_0)}{M + m},$$

а также их отношения, выявив замечательное совпадение:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} = \frac{m(M - \mu)}{M(m + \mu)} = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_0}.$$

Равенство отношений отличий температур от равновесной для холодной и тёплой воды доказывает (по методу математической индукции), что в ходе дальнейших переливаний эти отличия будут образовывать бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем

$$q = \frac{m(M - \mu)}{M(m + \mu)} = \frac{2}{3}.$$

**Примечание.** Если бы мы доказали этот факт по-другому, то можно было бы не тратить силы на расчёт  $T_1$  и  $\Delta T_1$ .

Применим формулу общего члена геометрической прогрессии:

$$\Delta T_n = \Delta T_0 \cdot q^n \quad \text{и} \quad \Delta t_n = \Delta t_0 \cdot q^n,$$

откуда выражаем начальные температуры:

$$T_0 = \tau + (T_n - \tau) \cdot q^{-n} \quad \text{и} \quad t_0 = \tau - (\tau - t_n) \cdot q^{-n},$$

а далее после подстановки получаем искомые ответы:

$$T_0 = \frac{MT_n + mt_n}{M + m} + \left( T_n - \frac{MT_n + mt_n}{M + m} \right) \cdot \left( \frac{M(m + \mu)}{m(M - \mu)} \right)^n = 85^\circ\text{C},$$

$$t_0 = \frac{MT_n + mt_n}{M + m} - \left( \frac{MT_n + mt_n}{M + m} - t_n \right) \cdot \left( \frac{M(m + \mu)}{m(M - \mu)} \right)^n = 4^\circ\text{C}.$$

#### Задача 4. Газовый тройник

Пусть  $n_1, n_2, n_3$  и  $n_4$  — установившиеся концентрации частиц соответственно в трёх сосудах и в свободном пространстве внутри тройника, тогда уравнения состояния идеального газа для этих четырёх объёмов имеют вид

$$P_1 = n_1 k T_0, \quad P_2 = n_2 k \cdot 2T_0, \quad P_3 = n_3 k \cdot 3T_0, \quad P_4 = n_4 k T_0,$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T_0$  — начальная температура системы. Объёмы трёх сосудов равны между собой и много больше объёма внутри тройника, поэтому закон сохранения числа частиц имеет вид

$$n_1 + n_2 + n_3 = 3 \cdot \frac{P_0}{kT_0}.$$

Поскольку диаметр каналов много меньше длины свободного пробега молекул, их поток следует рассчитывать через движение отдельных частиц, а не газа в целом. Поток  $Z$  частиц через канал (в одну сторону) прямо пропорционален концентрации  $n_{in}$  частиц на входе в канал и их средней скорости, которая пропорциональна корню из абсолютной температуры  $T_{in}$ , то есть этот поток имеет вид

$$Z = A \cdot n_{in} \cdot \sqrt{T_{in}},$$

где  $A$  — коэффициент, одинаковый для всех трубок с любой стороны. Через большое время потоки в разные стороны через каждую трубку сравняются:

$$\begin{cases} An_1 \sqrt{T_0} = An_4 \sqrt{T_0}, \\ An_2 \sqrt{2T_0} = An_4 \sqrt{T_0}, \\ An_3 \sqrt{3T_0} = An_4 \sqrt{T_0}. \end{cases}$$

**Примечание.** В силу симметрии тройника совпали вообще все шесть потоков (в две стороны для каждой из трёх трубок), но если бы, например, сечения трубок различались, то этого всеобщего равенства уже не случилось.

Решая совместно все 8 записанных выше уравнений, исключаем 4 концентрации и находим 4 искомых давления:

$$P_1 = P_4 = \frac{3P_0}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} \approx 1,3P_0,$$

$$P_2 = \frac{3P_0 \sqrt{2}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} \approx 1,9P_0,$$

$$P_3 = \frac{3P_0 \sqrt{3}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} \approx 2,3P_0.$$

**Задача 5. Заряженный треугольник**

Исследуем, как изменяется потенциал некоторой точки рассматриваемого треугольника при замене его на подобный ему с сохранением прежней поверхностной плотности заряда. Во-первых, потенциал обратно пропорционален линейному размеру, так как этот размер задаёт масштаб расстояний до всех точечных зарядов, образующих заряженное тело. Во-вторых, потенциал прямо пропорционален заряду, который в силу постоянства его поверхностной плотности прямо пропорционален площади, или квадрату линейного размера. Объединение этих двух зависимостей означает прямую пропорциональность между потенциалом и линейным размером.

**Примечание.** Обратите внимание на общность вывода: потенциал любой точки пространства (заданной относительно фигуры в единицах её линейного размера) прямо пропорционален линейному размеру любой плоской фигуры с постоянной поверхностной плотностью заряда.

Пусть  $R$  — радиус окружности, описанной вокруг треугольника  $ABC$ , тогда потенциалы вершин треугольника можно представить в виде

$$\varphi_A = aR, \quad \varphi_B = bR, \quad \varphi_C = cR,$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — некоторые коэффициенты, определяемые формой треугольника, но не зависящие от его размера, если он подобен исходному (выбор в качестве линейного размера именно радиуса описанной окружности связан только с тем, что нам нравится буква  $R$  для обозначения размера). Высота  $CD$  делит прямоугольный треугольник  $ABC$  на два подобных ему треугольника  $BCD$  и  $ACD$  с коэффициентами подобия  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  соответственно.

1. Найдём потенциал  $\varphi_C$  по принципу суперпозиции через пару новых треугольников (для них точка  $C$  — вершина того или другого острого угла):

$$\varphi_C = \varphi_C(BCD) + \varphi_C(ACD) = aR \sin \alpha + bR \cos \alpha = \varphi_A \sin \alpha + \varphi_B \cos \alpha.$$

2. Найдём потенциал  $\varphi_D$  по принципу суперпозиции через пару новых треугольников (для каждого из них точка  $D$  — вершина прямого угла):

$$\begin{aligned} \varphi_D &= \varphi_D(BCD) + \varphi_D(ACD) = cR \sin \alpha + cR \cos \alpha = \varphi_C(\sin \alpha + \cos \alpha) = \\ &= (\varphi_A \sin \alpha + \varphi_B \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha). \end{aligned}$$

**Задача 6. Растекание потока**

Пусть  $R$  — радиус пластины, тогда сила тока частиц, падающих не далее чем на расстоянии  $x$  от центра пластины, имеет вид

$$I = I_0 \cdot \frac{x^2}{R^2}.$$

Для нахождения приращения потенциала на расстоянии  $x$  от центра пластины применим закон Ома и формулу для удельного сопротивления к току через часть пластины в форме соосного с ней цилиндра радиусом  $x$  и высотой  $h$  с тонкими стенками толщиной  $dx$ :

$$d\varphi = -I \cdot \rho \cdot \frac{dx}{2\pi xh} = -\frac{\rho I_0 x dx}{2\pi h R^2}.$$

Изменение потенциала от центра к краю найдём через интеграл:

$$\varphi(R) - \varphi(0) = - \int_0^R \frac{\rho I_0 x dx}{2\pi h R^2} = - \left. \frac{\rho I_0 x^2}{4\pi h R^2} \right|_0^R = -\frac{\rho I_0}{4\pi h}.$$

Из условия  $\varphi(R) = 0$  (выбор потенциала земли) получаем первый ответ:

$$\varphi_0 = \varphi(0) = \frac{\rho I_0}{4\pi h}.$$

Для нахождения мощности, выделяющей в рассмотренном тонкостенном цилиндре, применим закон Джоуля-Ленца:

$$dP = I^2 \cdot \rho \cdot \frac{dx}{2\pi xh} = \frac{\rho I_0^2 x^3 dx}{2\pi h R^4}.$$

Искомую общую мощность найдём путём интегрирования:

$$P_0 = \int_0^R \frac{\rho I_0^2 x^3 dx}{2\pi h R^4} = \frac{\rho I_0^2 x^4}{8\pi h R^4} \Big|_0^R = \frac{\rho I_0^2}{8\pi h}.$$

**Задача 7. Ртутное зеркало телескопа**

Рассмотрим сечение жидкости вертикальной плоскостью, проходящей через ось вращения (рис. 6). Направим ось  $x$  горизонтально, ось  $y$  — вдоль оси вращения, выберем начало координат  $O$  в нижней точке поверхности жидкости и найдём форму этой поверхности как зависимость  $y(x)$ .

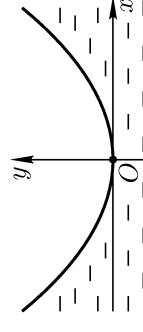


Рис. 6

**Примечание.** В образовательных целях мы рассмотрим три равносильных способа вывода этой зависимости. Вообще, решение реальных научных задач различными методами — это стандартный приём повышения надёжности результатов, так как вероятность получить один и тот же ошибочный ответ разными независимыми способами очень мала.

**Способ 1 — через энергию.** Во вращающейся системе отсчёта на элемент жидкости массой  $m$ , расположенный в точке  $(x; y)$ , действует центробежная сила  $F = -m\omega^2 x$ , интегрируя которую, находим потенциальную энергию в поле центробежных сил:

$$W = -\frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

где при подстановке константы интегрирования уже учтён выбор нуля потенциальной энергии в начале координат (для выведенной формулы можно было выбрать ноль в любой точке оси вращения, но берём именно начало координат для предстоящего учёта потенциальной энергии в поле тяжести).

В установившемся режиме поверхность жидкости должна быть эквипотенциальной (иначе началось бы перетекание жидкости), что даёт уравнение

$$mgy - \frac{m\omega^2 x^2}{2} = 0,$$

откуда находим искомую зависимость

$$y = \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2, \tag{3}$$

график которой имеет форму параболы, а значит, поверхность жидкости в пространстве является параболоидом вращения.

**Способ 2 — через давление.** Рассмотрим тонкий столб жидкости высотой  $y$ , расположенный на расстоянии  $x$  от оси вращения и имеющий толщину  $dx$  (вдоль оси  $x$ ) и  $dz$  (вдоль перпендикуляра к плоскости рисунка). Этот столб массой  $dm = \rho y dx dz$ , где  $\rho$  — плотность жидкости, движется в лабораторной системе отсчёта с центростремительным ускорением  $a = \omega^2 x$  за счёт нескомпенсированной силы гидростатического давления

$$dF = \rho gy \cdot dy dz,$$

где  $dy$  — изменение высоты столба жидкости при смещении на  $dx$ . Подставляя эти выражения во второй закон Ньютона  $dF = adm$ , получаем уравнение

$$g dy = \omega^2 x dx,$$

интегрируя которое, получаем нужную зависимость

$$y = \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2,$$

где при выборе константы интегрирования уже учтено условие  $y(0) = 0$ .

**Способ 3 — через касательную.** Во вращающейся системе отсчёта на элемент жидкости массой  $m$ , расположенный в точке  $(x; y)$ , действует центробежная сила  $F_1 = -m\omega^2 x$ , которую в сумме с силой тяжести  $F_2 = -mg$

можно назвать эффективной силой тяжести, так как силы гравитации и инерции во многом родственны. Поверхность жидкости должна быть перпендикулярна эффективному ускорению свободного падения, а значит, будет образовывать угол  $\varphi$  с горизонтом:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_1}{F_2} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Геометрический смысл производной — это тангенс угла наклона касательной, откуда следует уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g},$$

интегрируя которое, получаем нужную зависимость

$$y = \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2,$$

где при выборе константы интегрирования уже учтено условие  $y(0) = 0$ .

**Примечание.** Итак, функцию  $y(x)$  мы нашли тремя способами. Предлагаям читателям из спортивного интереса придумать ещё несколько вариантов. ☺

Рассмотрим отражение лучей лунного света, падающих параллельно оси  $y$ , в точке  $(x; y)$  поверхности ртuti (рис. 7). Из закона отражения и геометрических соотношений выразим координату  $f$  точки  $F$ , в которой отражённый луч пересечёт ось  $y$ :

$$f = y + x \operatorname{ctg} 2\varphi,$$

где  $\varphi$  — угол наклона касательной, равный углам падения и отражения:

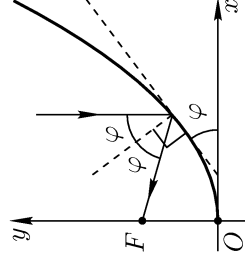


Рис. 7

$$\operatorname{tg} \varphi = y'(x) = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

После подстановки с помощью тригонометрической формулы

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{2 \operatorname{tg} \varphi}$$

получаем искомую координату

$$f = \frac{g}{2\omega^2},$$

которая удивительным образом не содержит координат точки отражения  $(x; y)$ , то есть все падающие лучи пройдут через точку  $F$ , которому поэтому логично называть фокусом параболического зеркала.



**Примечание.** Величину  $f$  можно найти по известной формуле  $f = R/2$  для фокусного расстояния сферического зеркала радиусом  $R$ , а радиус кривизны зависимости  $y(x)$  вблизи начала координат — из следующего мысленного эксперимента. Пусть материальная точка движется с постоянной скоростью  $v$  по оси  $x$  и с постоянным ускорением  $a$  по оси  $y$ , тогда её закон движения в проекции на ось  $y$  и траектория имеют соответственно вид:

$$x = vt, \quad y = \frac{at^2}{2} \quad \text{и} \quad y = kx^2, \quad \text{где} \quad k = \frac{a}{2v^2}.$$

В начале координат ускорение  $a$  равно центростремительному:

$$a = \frac{v^2}{R},$$

откуда получаем связь между радиусом кривизны параболы в её вершине и старшим коэффициентом соответствующей квадратичной функции:

$$R = \frac{v^2}{a} = \frac{1}{2k}.$$

После подстановки  $k = \omega^2/(2g)$  из уравнения поверхности ртути получаем

$$R = \frac{g}{\omega^2} \quad \text{и} \quad f = \frac{R}{2} = \frac{g}{2\omega^2}.$$

Изображение Луны будет в фокальной плоскости параболического зеркала, а диаметр изображения можно в приближении малых углов найти по формуле

$$d = f\gamma = \frac{g\gamma}{2\omega^2},$$

из которой получаем окончательный ответ

$$\omega = \sqrt{\frac{g\gamma}{2d}} \approx 1,1 \text{ с}^{-1}.$$

## Старшая лига

### Задача 1. Плоская капля

См. зад. 1 мл. лиги.

### Задача 2. Апельсинометатель

Известно, что для достижения максимальной дальности броска из неподвижного положения с фиксированной по модулю начальной скоростью  $v_0$  нужно направлять её под углом  $45^\circ$  к горизонту, тогда дальность полёта вычисляется по формуле  $L = v_0^2/g$ , из которой получаем выражение  $v_0 = \sqrt{gL}$ .

Выясним, как Винтику следует направить начальную скорость апельсина при броске с движущегося стержня. Удобно обезразмерить задачу, обозначив скорость Винтика в момент броска через  $kv_0$ . Пусть  $\varphi$  — угол между начальной скоростью  $v_0$  апельсина и горизонтом в системе отсчёта Винтика, тогда горизонтальная составляющая скорости  $v_x$  апельсина относительно земли, время  $T$  и дальность  $x$  полёта имеют соответственно вид

$$v_x = v_0 \cos \varphi + kv_0, \quad T = \frac{2v_0 \sin \varphi}{g},$$

$$x = v_x T = \frac{v_0^2}{g} (\sin 2\varphi + 2k \sin \varphi) = L(\sin 2\varphi + 2k \sin \varphi).$$

Вычислив производную

$$x'(\varphi) = L(4 \cos^2 \varphi + 2k \cos \varphi - 2)$$

и приравняв её к нулю, находим угол

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{k^2 + 8} - k}{4},$$

под которым Винтику нужно бросать апельсин для достижения максимальной дальности полёта.

**Примечание.** Можно убедиться, что в частном случае  $k = 0$  получается известный результат  $\varphi = 45^\circ$ , а при увеличении  $k$  растёт и оптимальный угол, так как тогда увеличивается время полёта и, следовательно, снос апельсина за счёт скорости самого Винтика.

Осталось выяснить, когда же нужно совершать бросок. Пусть в некоторый момент времени стержень составляет угол  $\gamma$  с горизонтом,  $v$  и  $u$  — скорости Винтика и Шпунтика соответственно,  $m$  — массы коротышек, тогда условие постоянства длины стержня и закон сохранения энергии имеют вид

$$v \cos \gamma = u \sin \gamma,$$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m\dot{u}^2}{2} = mgH(1 - \sin \gamma).$$

После исключения  $u$  получим  $v$  как функцию от  $\gamma$ :

$$v = \sqrt{2gH(\sin^2 \gamma - \sin^3 \gamma)}.$$

Вычислив производную

$$v'(\gamma) = \sqrt{\frac{gH}{2}} \cdot \frac{(2 - 3 \sin \gamma) \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin \gamma}}$$

и приравняв её к нулю, находим условие

$$\sin \gamma = \frac{2}{3},$$

при котором скорость Винтика будет максимальна:

$$v = \sqrt{\frac{8gH}{27}}.$$

Отсюда находим лучшее значение введённого ранее коэффициента

$$k = \frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{8H}{27L}},$$

которое подставляем в выражения для  $x$  и  $\varphi$ , чтобы получить искомую максимальную дальность:

$$S = L \left( \sin 2\varphi + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2H}{3L}} \sin \varphi \right),$$

где

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{H + 27L} - \sqrt{H}}{3\sqrt{6L}}.$$

### Задача 3. Пружина с переменным числом витков

Все изменения числа свободных витков и соответственно жёсткости пружины происходят в положении равновесия, когда пружина не деформирована, причём длина пружины остаётся прежней, поэтому координата положения равновесия и энергия системы сохраняются. Пусть  $k$  — жёсткость одного витка, тогда равенство энергий в крайних положениях при изначальных колебаниях и после освобождения  $\Delta N$  витков имеет вид

$$\frac{k}{N} \cdot \frac{A_0^2}{2} = \frac{k}{N + \Delta N} \cdot \frac{A^2}{2},$$

откуда находим искомую амплитуду:

$$A = A_0 \sqrt{1 + \frac{\Delta N}{N}}.$$

Пусть  $m$  — масса груза, периоды колебаний до начала освобождения витков и после освобождения  $n$  витков имеют соответственно вид

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mN}{k}} \quad \text{и} \quad T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m(N+n)}{k}},$$

откуда получаем соотношение

$$T_n = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{n}{N}}.$$

К искомому моменту времени  $t$  груз совершит по половине колебания с каждым числом витков от  $(N+1)$  до  $(N+\Delta N)$  включительно:

$$t = \frac{1}{2} \cdot (T_1 + T_2 + \dots + T_{\Delta N}) = \frac{T_0}{2} \sum_{n=1}^{\Delta N} \sqrt{1 + \frac{n}{N}}.$$

На основании условий  $N \gg 1$  и  $\Delta N \gg 1$  это выражение можно упростить:

$$t \approx \frac{T_0}{2} \int_0^{\Delta N} \sqrt{1 + \frac{n}{N}} dn = \frac{T_0}{2} \left(1 + \frac{n}{N}\right)^{3/2} \Big|_0^{\Delta N} = \frac{T_0}{2} \left( \left(1 + \frac{\Delta N}{N}\right)^{3/2} - 1 \right).$$

Обратите внимание на различие между пределами интеграла и суммы: оно необходимо для правильного учёта площадей крайних столбиков. Точность была бы чуть выше при симметричной корректировке, то есть при выборе пределов от 0,5 до  $\Delta N + 0,5$ , но в условиях задачи это не принципиально.

### Задача 4. Урановый шар

По закону теплопроводности мощность потока энергии наружу через сферу радиусом  $r$  и толщиной  $dr$  имеет вид

$$N = -k \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{dT}{dr},$$

где знак минус обеспечивает условие  $N > 0$  при  $dT/dr < 0$ . В стационарном состоянии эти потери равны тепловой мощности, выделяющей внутри шара радиусом  $r$ :

$$N = \frac{4}{3} \pi r^3 q.$$

Приравняв эти выражения для  $N$ , получаем дифференциальное уравнение

$$dT = -\frac{qr dr}{3k},$$

интегрируя которое находим общее решение

$$T = -\frac{qr^2}{6k} + C,$$

а из граничного условия  $T(R) = T_0$  выражаем константу интегрирования

$$C = T_0 + \frac{qR^2}{6k}.$$

После подстановки этого выражения для  $C$  в общее решение получаем искомое частное решение дифференциального уравнения:

$$T = T_0 + \frac{q}{6k} (R^2 - r^2).$$

**Задача 5. Газовый тройник**

См. зад. 4 мл. лиги.

**Задача 6. Заряженные многогранники**

Рассмотрим общий случай взаимодействия точечного заряда  $Q$  с пластиной произвольной формы, заряженной равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$  и видимой из точечного заряда под телесным углом  $\Omega$ . По теореме Гаусса найдём поток электрического поля точечного заряда через пластину:

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{\Omega}{4\pi} = kQ\Omega. \tag{4}$$

Последовательно используя три определения (потока поля, поверхностной плотности заряда и напряжённости поля), установим связь между потоком  $\Phi$  и перпендикулярной проекцией силы  $F_{\perp}$ , действующей на пластину со стороны точечного заряда:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\sigma} \int_S \vec{E} \cdot \sigma d\vec{S} = \frac{1}{\sigma} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{q} = \frac{1}{\sigma} \int_S dF_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{\sigma}, \tag{5}$$

где под «векторным» зарядом  $d\vec{q}$  подразумевается математическая абстракция: вектор, численно равный заряду  $dq$  и перпендикулярный поверхности  $dS$ , по которой распределён этот заряд. Приравнивая выражения (4) и (5), найдём проекцию силы взаимодействия:

$$F_{\perp} = kQ\sigma\Omega.$$

По третьему закону Ньютона это также и сила, с которой пластина действует на точечный заряд вдоль нормали к пластине, поэтому из определения напряжённости находим нормальную составляющую поля пластины в области точечного заряда:

$$E_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{Q} = k\sigma\Omega. \tag{6}$$

**Примечание.** Можно проверить выведенную общую формулу в частном случае: после подстановки телесного угла полупространства  $\Omega = 2\pi$  получаем известную формулу  $E = \sigma/2\epsilon_0$  для поля равномерно заряженной плоскости.

В силу симметрии каждая равномерно заряженная грань правильного многогранника создаёт в его центре поле, направленное по нормали к этой грани, то есть по формуле (6) мы для всех граней обеих рассматриваемых в задаче фигур будем находить полное поле, а не только одну из ненулевых проекций.

1. Каждая из трёх взаимно перпендикулярных проекций напряжённости поля в центре куба создаётся зарядами, распределёнными по противоположным граням и в сумме составляющим  $7q$ :

$$E_x = k \cdot \frac{6q}{a^2} \cdot \frac{4\pi}{6} - k \cdot \frac{q}{a^2} \cdot \frac{4\pi}{6} = \frac{5q}{6\epsilon_0 a^2},$$

$$E_y = k \cdot \frac{5q}{a^2} \cdot \frac{4\pi}{6} - k \cdot \frac{2q}{a^2} \cdot \frac{4\pi}{6} = \frac{3q}{6\epsilon_0 a^2},$$

$$E_z = k \cdot \frac{4q}{a^2} \cdot \frac{4\pi}{6} - k \cdot \frac{3q}{a^2} \cdot \frac{4\pi}{6} = \frac{q}{6\epsilon_0 a^2}.$$

Искомый модуль напряжённости найдём по трёхмерной теореме Пифагора:

$$E_1 = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \frac{q\sqrt{35}}{6\epsilon_0 a^2}.$$

2. Поле в центре правильного тетраэдра, создаваемое зарядами на одной грани, имеет вид

$$E_+ = k\sigma_1 \cdot \frac{4\pi}{4} = \frac{\sigma_1}{4\epsilon_0}.$$

Если бы остальные три грани имели такую же поверхностную плотность заряда  $\sigma_1$ , то они вместе создавали в центре такое же поле, но в противоположном направлении, так как суммарное поле должно отсутствовать в силу симметрии. Поэтому фактическое поле  $E_-$  этих трёх граней можно найти из прямой пропорциональности напряжённости заряду:

$$E_- = E_+ \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{\sigma_3}{4\epsilon_0}.$$

Ответ получаем, ещё раз применяя принцип суперпозиции полей:

$$E_2 = |E_+ - E_-| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{4\epsilon_0}.$$

**Задача 7. Растекание потока**

См. зад. 6 мл. лиги.

**Задача 8. Ртутное зеркало телескопа**

См. зад. 7 мл. лиги.