МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА–2023» (математика)

Второй день

Якутск 2023

Сборник содержит задачи XXX Международной олимпиады школьников «Туймаада» по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: А. С. Голованов, К. С. Иванов, К. П. Кохась, Ф. В. Петров. Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

Старшая лига

5. По бесконечному координатному морю плавает кораблик. В момент времени t кораблик находится в точке с координатами $\big(f(t), g(t)\big)$, где f и g — два многочлена третьей степени. Вчера в 14:00 кораблик оказался там же, где был в 13:00, а в 20:00 — там же, где был в 19:00. Докажите, что кораблик плавает по прямой.

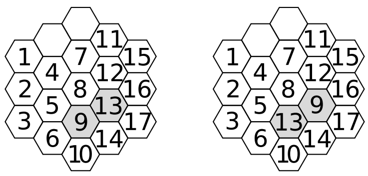
(А. Голованов)

6. На плоскости нарисовано n отрезков, длины которых равны a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Любой луч, выходящий из точки O, пересекает хотя бы один отрезок. Пусть h_i — это расстояние от точки O до отрезка (не до прямой!) с номером i. Докажите неравенство:

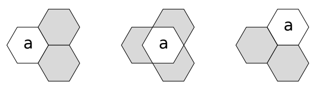
$$\frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} + \ldots + \frac{a_n}{h_n} \geqslant 2\pi\,.$$

(Ф. Бахарев)

7. Есть гексагональная доска со стороной n клеток, на ее клетках лежат шестиугольные плитки, пронумерованные натуральными числами. Две соседние клетки доски оставлены пустыми, благодаря чему плитки можно двигать. Две соседние по стороне плитки поменяли местами (см. пример на рисунке). Докажите, что при $n \geqslant 3$, двигая плитки, не удастся из первого положения получить второе.



Примечание. Чтобы подвинуть плитку a, рядом должны находиться две пустые клетки. Например, если они расположены справа от плитки a (левый рис.), мы можем подвинуть плитку a вправо, пока она не упрется углом (рис. в центре), после чего ее можно сдвинуть вправо вверх или вправо вниз (рис. справа).



(R. Karpman, É. Roldán)

8. Дано натуральное число n. Пусть A – множество точек x интервала $(0,1)$ таких, что $|x - \frac{p}{q}| > \frac{1}{n^3}$ для любой рациональной дроби $\frac{p}{q}$ со знаменателем $q \leqslant n^2$. Докажите, что A представляет собой объединение интервалов суммарной длины не более $\frac{100}{n}$.

(Ф. Петров)

Младшая лига

5. В графе p вершин, пронумерованных числами от 1 до p, и q рёбер, пронумерованных числами от $p+1$ до $p+q$. Оказалось, что для любого ребра сумма номеров концов этого ребра и номера самого́ ребра равна одному и тому же числу s. Еще известно, что из всех вершин выходит одно и то же число ребер. Докажите, что $s = \frac{1}{2}(4p+q+3)$.

(*R. Figueroa-Centeno, R. Ichishima, F. Muntaner-Batle*)

6. *Евклидов шаг* переводит пару натуральных чисел (a, b), в которой $a > b$, в пару (b, r), где r — остаток от деления a на b. Назовём *сложностью* пары (a, b) количество евклидовых шагов, требующихся, чтобы перевести её в пару вида $(s, 0)$. Докажите, что если $ad - bc = 1$, то сложности пар (a, b) и (c, d) отличаются не более чем на 2.

(*А. Голованов*)

7. По кругу стоит $3n$ человек — это n семей «мама–папа–ребенок». Любые два человека, стоящие рядом, могут поменяться местами, кроме случая, когда ребёнок меняется местом с одним из своих родителей (это не разрешено). При каких n с помощью таких обменов людей можно расставить по кругу в любом порядке? (Перестановки, отличающиеся циклическим сдвигом, считаются различными.)

(*К. Кохась*)

8. Окружность ω расположена внутри окружности Ω и касается её внутренним образом в точке P. На окружности ω выбирают точку S и проводят через нее касательную к ω. Эта касательная пересекает окружность Ω в точках A и B. Пусть I — центр ω. Найдите ГМТ центров окружностей, описанных около треугольников AIB.

(*А. Заславский, П. Кожевников*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Старшая лига

5. Проведём через точки, в которых кораблик был в 13.00 и в 19.00, а потом через час, (какую-нибудь) прямую. Как известно, её уравнение можно записать в виде $Ax + By = C$, где хотя бы одно из чисел A и B отлично от 0. Кораблик оказывается на этой прямой не менее четырёх раз, то есть многочлен

$$Af(t) + Bg(t) - C = 0$$

имеет не менее четырёх корней. А поскольку его степень не выше 3, он равен 0 при всех t, то есть кораблик всегда находится на построенной прямой.

6. Для осмысленности неравенства мы будем считать, что отрезки не проходят через точку O. (На самом деле, если i-й отрезок проходит через O, то растояние от O до него равно 0 и дробь a_i/h_i следует трактовать как $+\infty$.)

Заметим, что имеет место следующее *правило измельчения.* Если какой-либо из отрезков мы разобьем на части, скажем, первый отрезок разобьем на части длиной a_1' и a_2'' (где $a_1 = a_1' + a_2''$), и будем считать их отдельными отрезками, то доказываемое неравенство лишь усилится. Действительно, $h_1' \geqslant h_1$, ибо если ближайшая к точке O точка на отрезке a_1 попала в часть a_1', то $h_1' = h_1$, а если не попала, то $h_1' > h_1$. Аналогично $h_2'' \geqslant h_1$ и таким образом $\frac{a_1}{h_1} = \frac{a_1'}{h_1} + \frac{a_1''}{h_1} \geqslant \frac{a_1'}{h_1'} + \frac{a_1''}{h_1''}$.

Проведем из точки O лучи через все концевые точки отрезков. Эти лучи разбивают плоскость на несколько углов, а отрезки — на части так, что каждая часть отрезка содержится лишь в одном из углов. Будем считать каждую из таких частей самостоятельным отрезком. По правилу измельчения достаточно доказать неравенство для образовавшегося множества измельченных отрезков. Уберем некоторые отрезки так, чтобы в каждом угле оставался ровно один отрезок, и докажем, что даже в этом случае неравенство выполняется.

Л е м м а. Пусть в треугольнике OAB $\alpha = \angle AOB$, $OA \leqslant OB$ и основание высоты, опущенной из вершины O, не лежит внутри отрезка AB. Тогда $\frac{AB}{OA} \geqslant \alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Круговой сектор радиуса OA и раствора α целиком помещается в треугольнике AOB, поэтому его площадь не превосходит площади треугольника, т.е.

$$\frac{1}{2}OA^2 \cdot \alpha \leqslant S(AOB) \leqslant \frac{1}{2}OA \cdot AB.$$

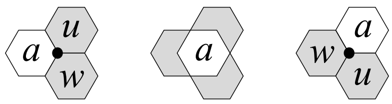
Отсюда немедленно следует требуемое неравенство.

С л е д с т в и е. Пусть в треугольнике OAB $\alpha = \angle AOB$, а высота, проведенная из вершины O, имеет основание на отрезке AB и длину h. Тогда $\frac{AB}{h} \geqslant \alpha$.

Для доказательства заметим, что высота разбивает треугольник на два треугольника. К каждому из них применим утверждение леммы и сложим полученные неравенства.

Возвращаясь к задаче, применим лемму для каждого из секторов, и, сложив все неравенства, получим требуемое.

7. Будем считать, что одна пустая клетка на самом деле накрыта «прозрачной» плиткой u, вторая пустая клетка — плиткой v, а при движении «настоящей» клетки a происходит циклический сдвиг: a занимает место u, u занимает место v, а v — место a.



Проверим, что если при движении плиток пустышки u и v вернулись на две исходные клетки, то каждая из них вернулась на свое исходное место (не могло быть так, что u и v поменялись местами).

Чтобы легко различать пустышки, будем рисовать вектор, идущий из центра клетки u в центр клетки v. Как видно из предыдущей картинки, при движении настоящей плитки происходит поворот этого вектора на $\pm 120^\circ$. Для того чтобы пустышки поменялись местами, вектор должен повернуться на 180°, очевидно, что этого не может произойти с помощью повторения операций поворота на $\pm 120^\circ$.

Итак, мы установили, что если при движении плиток две настоящие плитки поменялись местами, а все остальные плитки вернулись на первоначальные места, то прозрачные плитки тоже вернулись на первоначальные места, и таким образом рассматриваемая перестановка — это транспозиция. Но транспозиция — это нечетная перестановка. Получить ее, последовательно выполняя 3-циклы, невозможно.

8. Выпишем в порядке возрастания все несократимые дроби со знаменателями, не превосходящими n^2, на отрезке $[0; 1]$. Воспользуемся следующим свойством этой последовательности: если $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ – два последовательных члена последовательности, то $b+d \geqslant n^2$ и $ad-bc = \pm 1$. Первое следует из того, что дробь $\frac{a+c}{b+d}$ заключена между $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, но не присутствует в последовательности. Для доказательства второй части примем без ограничения общности, что $b > d$ и найдём такие $u < a$, $v < b$, что $av - bu = 1$ (такие найдутся, поскольку $(a, b) = 1$). Если $\frac{u}{v} \neq \frac{c}{d}$, то, поскольку $\frac{a}{b} > \frac{u}{v}$, разность $\frac{c}{d} - \frac{u}{v} = \frac{cv-du}{dv} \geqslant \frac{1}{dv}$ меньше разности $\frac{a}{b} - \frac{u}{v} = \frac{1}{bv}$, откуда $d > b$ — противоречие. Значит, на самом деле дробь $\frac{u}{v}$ — соседняя с $\frac{a}{b}$.

Множество A получается, если из каждого отрезка между соседними дробями, длина которого больше $\frac{2}{n^3}$ (назовём такие отрезки *длинными*), удалить слева и справа по отрезку длины $\frac{1}{n^3}$. Пусть концы длинного отрезка имеют знаменатели b и d, $b > d$. Тогда, как мы видели, $b+d > n^2$, откуда $b > \frac{n^2}{2}$, а длина отрезка равна $\frac{1}{bd} > \frac{2}{n^3}$, откуда $bd < \frac{n^3}{2}$ и $d < n$. Для каждого знаменателя $d < n$ длинных отрезков, у которых один из концов — дробь со знаменателем d, имеется не более $2d$. Как мы видели, знаменатель другого конца не менее $\frac{n^2}{2}$, следовательно, длина каждого такого отрезка не более $\frac{2}{dn^2}$, а суммарная длина всех таких отрезков не более $\frac{4}{n^2}$. Умножая эту оценку на n, получаем, что суммарная длина всех длинных отрезков — и тем более всех отрезков, составляющих множество A, — не более $\frac{4}{n}$.

Младшая лига

5. Пусть r — степень (любой) вершины. Числа p, q и r связаны соотношением

$$rp = 2q$$

(в обеих частях равенства написана сумма степеней всех вершин). Для каждого ребра найдем сумму номеров концов этого ребра и самого́ этого ребра, а затем просуммируем найденные суммы по всем ребрам. С одной стороны, по условию получится qs. С другой стороны, это будет сумма номеров всех ребер плюс умноженная на r сумма номеров всех вершин, т.е.

$$sq = (p+1)+\ldots+(p+q)+r(1+2+\ldots+p) = q \cdot \frac{2p+q+1}{2} + \frac{rp(p+1)}{2}.$$

Заменим rp на $2q$ и сократим на q, получится требуемое.

6. Пусть $q = \left[\frac{c}{d}\right]$ – неполное частное от деления c на d. Если $\left[\frac{a}{b}\right]$ тоже равно q, то один евклидов шаг переводит пары (a, b) и (c, d) в пары $(b, a-qb)$ и $(d, c-qd)$, также удовлетворяющие условию задачи (потому что $d(a-qb)-b(c-qd)=aq-bc=1$), и поэтому утверждение задачи достаточно доказать для новых пар.

Поскольку сумма чисел в парах в результате евклидова шага уменьшается, когда-нибудь мы либо получим пару, содержащую 0, либо придём к ситуации, в которой $\left[\frac{a}{b}\right] \neq \left[\frac{c}{d}\right]$.

У чисел в паре (a,b), удовлетворяющей условию задачи, не может быть общего делителя, большего 1, поскольку выполняется соотношение $ad-bc=1$. Поэтому если одна из пар теперь содержит 0, то это пара $(1,0)$. Если в этот момент другая пара содержит 0, то сложности пар равны. Если в другой паре нет 0, то одно из чисел в ней равно 1, и её сложность на 1 больше.

Осталось разобрать случай, когда получены две пары (a,b) и (c,d), у которых $\left[\frac{a}{b}\right] > \left[\frac{c}{d}\right] = q$. При этом $a \geqslant b(q+1)$ и $c < d(q+1)$, то есть $ad \geqslant bd(q+1) > bc = ad-1$, откуда $a=b(q+1)$. Так как a и b взаимно просты, $b=1$, $a=q+1$, $c=ad-1=(a-1)d+(d-1)$. Поэтому пару (a,b) евклидов шаг переводит в $(1,0)$, а пару (c,d) – в пару $(d,d-1)$, переходящую в $(1,0)$ при $d=2$ и в $(d-1,1)$ и затем в $(1,0)$ при $d>2$. В этих случаях сложность пары (a,b) меньше сложности пары (c,d) на 1 и 2 соответственно.

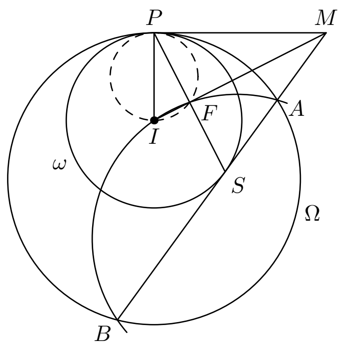
7. О т в е т: таких n не существует. На самом деле тут имеется три класса эквивалентных расстановок. Но мы проверим лишь то, что существует инвариант, принимающий три значения.

Будем считать, что люди стоят в шеренгу (двух крайних при этом считаем соседями). Определим вес каждой семьи: рассмотрим, как эти трое стоят в шеренге, если ребенок стоит первым, полагаем вес равным 1, если вторым — 2, если третьим — 0. Нетрудно проверить, что при выполнении операций смены мест суммарный вес семей по модулю 3 не меняется. В частности, из любой расстановки нам не удастся получить расстановку, где ребенок поменялся с одним из родителей, а все остальные люди остались на тех же местах.

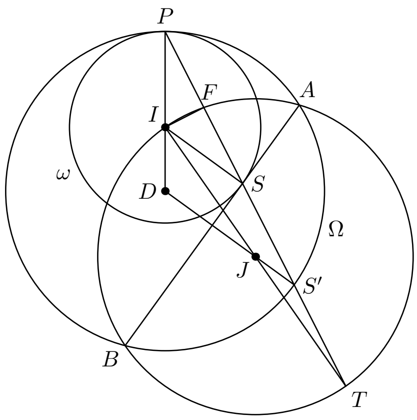
8. Пусть D — центр Ω, R и r — радиусы Ω и ω. Тогда искомое ГМТ есть окружность с центром D и радиусом $R-\frac{1}{2}r$ (возможно, стоит откинуть одну точку, где картинка вырождается).

Л е м м а. Пусть в условиях задачи F — это середина PS. Тогда точка F лежит на окружности AIB.

Доказательство. Пусть прямая AB и касательная к Ω, проведенная в точке P, пересекаются в точке M. Тогда треугольник SPM равнобедренный и биссектриса MI проходит через точку P. При этом угол IFP прямой и описанная окружность IFP касается обеих окружностей Ω и ω в точке P. Окружность Ω дает нам равенство $MA \cdot MB = MP^2$, а окружность IFP — равенство $MF \cdot MI = MP^2$. Сопоставляя эти равенства, получаем, что $MA \cdot MB = MF \cdot MI$, откуда и следует требуемое.



Обозначим центр окружности AIB через J. Пусть T — точка окружности AIB, диаметрально противоположная точке I. Поскольку угол IFS прямой, он опирается на диаметр, т.е. прямая PS проходит через точку T. Пусть S' — это точка пересечения прямой PS с окружностью Ω. В окружности Ω имеем равенство



$$AS \cdot SB = PS \cdot SS',$$

а в окружности AIB — равенство

$$AS \cdot SB = FS \cdot ST.$$

Сопоставляя эти равенства (учитывая, что $FS = \frac{1}{2}PS$), получаем, что $SS' = \frac{1}{2}ST$, следовательно, JS' — средняя линия треугольника IST, $JS' = \frac{1}{2}IS = \frac{1}{2}r$, $JS' \parallel IS$. Но гомотетия с центром P, отображающая окружность ω на Ω, переводит прямую IS в прямую DS', значит, $DS' \parallel IS$. Таким образом, точка J лежит на прямой DS'. Значит, $DJ = DS' - JS' = R - \frac{1}{2}r$.