МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА–2023» (математика)

Первый день

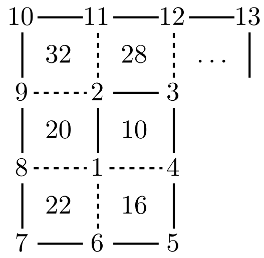
Якутск 2023

Сборник содержит задачи XXX Международной олимпиады школьников «Туймаада» по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: А. В. Антропов, С. Л. Берлов, А. С. Голованов, К. П. Кохась. Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

Старшая лига

1. В узлах клетчатой решетки по спирали расставляют числа 1, 2, 3… (см. рисунок). Потом в центре каждой клетки пишут сумму чисел в ее узлах. Докажите, что для любого натурального n в центрах клеток бесконечно много раз встретятся числа, делящиеся на n.



(*К. Кохась*)

2. В графе с n вершинами каждые две вершины соединены единственным путём. Для каждых двух вершин u и v обозначим через $d(u,v)$ расстояние между u и v, т. е. количество ребер в пути, соединяющем эти вершины, а через $\deg u$ обозначим степень вершины u. Пусть W — сумма всех попарных расстояний между вершинами, D — сумма всех взвешенных попарных расстояний:

$$D = \sum_{\{u,v\}} (\deg u + \deg v) d(u,v).$$

Докажите, что $D = 4W - n(n-1)$.

(*I. Gutman*)

3. Докажите что при натуральных $n \geqslant 2$ выполняется неравенство:

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n+1}} + \sqrt[3]{\frac{2}{n+1}} + \ldots + \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}}{n} \leqslant \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt[3]{\frac{n-1}{n}}}{n-1}.$$

(*J. Liu*)

4. На плоскости даны точки A и B, а также прямая ℓ, не перпендикулярная AB и не пересекающая отрезок AB. Рассматриваются всевозможные окружности с центрами $O \notin \ell$, проходящие через точки A и B и пересекающие ℓ в двух точках — обозначим эти точки C и D. Докажите, что все описанные окружности треугольников OCD касаются одной и той же фиксированной окружности.

(*С. Берлов*)

Младшая лига

1. Докажите, что при a, b, $c \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$(1-a)(1+ab)(1+ac)(1-abc) \leqslant (1+a)(1-ab)(1-ac)(1+abc).$$

(*G. Raposo*)

2. Серёжа и Таня собираются показать Маше следующий фокус. Серёжа выходит из комнаты. Маша выписывает последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где все a_k равны 0 или 1. После этого Таня выписывает последовательность $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где все b_k тоже равны 0 или 1. Далее Маша либо ничего на делает, либо говорит «Мутабор!» и заменяет обе последовательности: свою — на последовательность $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$, а последовательность Тани — на $(1-b_n, 1-b_{n-1}, \ldots, 1-b_1)$. Последовательность Маши закрывают салфеткой, а в комнату приглашают Серёжу. Серёжа, посмотрев на последовательность Тани, должен назвать последовательность, закрытую салфеткой. Для каких n Серёжа и Таня, подготовившись заранее, смогут показать такой фокус? От Серёжи не требуется определять, была ли проведена операция «Мутабор».

(*А. Антропов, Т. Гизатуллин*)

3. Внутри треугольника ABC нашлась такая точка L, что $CL = AB$ и $\angle BAC + \angle BLC = 180^\circ$. Прямая, параллельная прямой BC и проходящая через точку L, пересекает сторону AC в точке K. Докажите, что $AB = BK$.

(*А. Антропов*)

4. Два человека играют в игру. Имеется $n > 2$ куч, в каждой из которых лежит $n^{10}+1$ камней. За один ход можно убрать все кучи, кроме одной, а оставшуюся кучу разделить на n непустых куч. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его противник?

(*T. Abuku, K. Sakai, M. Shinoda, K. Suetsugu*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Старшая лига

1. Клетки плоскости образуют спираль, состоящую из прямолинейных «коридоров», поворачивающих под прямыми углами. Как нетрудно видеть, числа в центрах соседних клеток коридора (кроме угловых) отличаются на 4 и, кроме того, делятся на 4. Таким образом, в клетках коридора стоят последовательные числа, делящиеся на 4. Значит, в любом достаточно длинном коридоре встретится число, делящееся на n.

2. Лемма (об асфальтовом заводе). Пусть T — произвольное дерево с n вершинами, α — любая его вершина. Тогда

$$\sum_u (\deg u - 1)\ d(u,\alpha) = \sum_u d(u,\alpha) - (n-1).$$

Доказательство. Вообразим себе, что вершины — это города, ребра — грунтовые дороги, в вершине α построен асфальтовый завод и мы собираемся заасфальтировать все дороги. На одно ребро требуется одна тонна асфальта, сама укладка асфальта бесплатна, да рубль перевоз — в смысле, что перевоз одной тонны асфальта по одному ребру стоит один рубль.

Итак, почем нам обойдётся тотальная асфальтизация? План работ очевиден: доставляем нужное количество асфальта в очередной город и асфальтируем все дороги, выходящие из этого города в сторону удаления от α. Эту величину подсчитывает левая часть нашего равенства.

Теперь прокрутим фарш обратно: демонтируем весь асфальт и увезем его обратно в город α. Для каждого ребра снимем тонну асфальта с дороги и разместим ее конце ребра u, находящемся дальше от α, после чего увезем асфальт на завод, потратив $d(u,\alpha)$ рублей. Мы вернули дорожное покрытие к исходному состоянию, но для каждой дороги при проведении эвакуации потратили на 1 рубль больше, чем при доставке асфальта. Это выражается в правой части равенства. $\square$

Теперь покажем, как из этой леммы можно вывести утверждение задачи.

П е р в о е   р е ш е н и е. Пусть V — это множество вершин дерева. Заметим, что

$$\begin{aligned}
D = &\sum_{\{u,v\}\subset V} (\deg u + \deg v) d(u,v) = \\
&= \sum_{v\in V}\sum_{u\in V} \deg u \cdot d(u,v) = \\
&= \sum_{v\in V}\sum_{u\in V} (\deg u - 1) d(u,v) + \sum_{v\in V}\sum_{u\in V} d(u,v) \underset{(*)}{=} \\
&= \sum_{v\in V}\Big(\sum_{u\in V} d(u,v) - (n-1)\Big) + 2W = \\
&= 4W - n(n-1).
\end{aligned}$$

В равенстве $(*)$ мы использовали утверждение леммы.

В т о р о е   р е ш е н и е. Докажем индукцией по n, что в дереве на n вершинах выполняется равенство $D = 4W - n(n-1)$. База $n = 1$ тривиальна.

Докажем индукционный переход. Пусть дерево T' на n вершинах получено из дерева T на $n-1$ вершине добавлением висячей вершины α к вершине β. Тогда

$$\begin{aligned}
D(T') = &\sum_{\{u,v\}\subset T'} (\deg_{T'} u + \deg_{T'} v) d(u,v) = \\
&= \sum_{\substack{\{u,v\}\subset T': \\ \alpha\notin\{u,v\}}} (\deg_{T'} u + \deg_{T'} v) d(u,v) + \sum_{\substack{u\in T': \\ u\neq\alpha}} (\deg_{T'} u + \deg_{T'} \alpha) d(u,\alpha) = \\
&= D(T) + \sum_{u\in T} d(u,\beta) + \sum_{\substack{u\in T': \\ u\neq\alpha}} (\deg_{T'} u + 1) d(u,\alpha),
\end{aligned}$$

Здесь поправочное слагаемое $\sum_u d(u,\beta)$ появилось из-за соотношения $\deg_{T'}\beta = \deg_T \beta + 1$. Далее,

$$W(T') = \sum_{\{u,v\}\subset T'} d(u,v) = \sum_{\substack{\{u,v\}\subset T': \\ \alpha\notin\{u,v\}}} d(u,v) + \sum_{\substack{u\in T': \\ u\neq\alpha}} d(u,\alpha) = W(T) + \sum_u d(u,\alpha).$$

По предположению индукции выполняется равенство

$$D(T) = 4W(T) - (n-1)(n-2).$$

Индукционный переход будет доказан, если мы проверим, что выполняется равенство

$$\sum_u (\deg u + 1) d(u,\alpha) + \sum_u d(u,\beta) = 4\sum_u d(u,\alpha) - 2(n-1). \qquad (*)$$

Упростим его. Заметим, что

$$\sum_{u\in T} d(u,\beta) = \sum_{u\in T'} d(u,\alpha) - (n-1).$$

Убирая три суммы $\sum_u d(u,\alpha)$ из обеих частей равенства $(*)$, получаем равенство из леммы об асфальтовом заводе:

$$\sum_u (\deg u - 1)\ d(u,\alpha) = \sum_u d(u,\alpha) - (n-1).$$

3. Пусть $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Тогда функция $f(x)$ выпукла вверх на $[0,1]$, то есть

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \leqslant (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \qquad (*)$$

при $x, y, \alpha \in [0;1]$. Догадаться об этом можно, посмотрев на график функции f на отрезке $[0;1]$, а доказать — найдя вторую производную или терпеливым возведением в куб.

Для каждого k от 1 до $n-1$ применим неравенство (*) к $x = \frac{k}{n+1}$, $y = \frac{k+1}{n+1}$, $\alpha = \frac{k}{n}$. Поскольку

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n+1} = \frac{1}{n},$$
$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{2}{n+1} + \frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n+1} = \frac{2}{n}, \quad \text{и т. д.,}$$

у нас получатся неравенства

$$\frac{n-1}{n} f\Big(\frac{1}{n+1}\Big) + \frac{1}{n} f\Big(\frac{2}{n+1}\Big) \leqslant f\Big(\frac{1}{n}\Big),$$
$$\frac{n-2}{n} f\Big(\frac{2}{n+1}\Big) + \frac{2}{n} f\Big(\frac{3}{n+1}\Big) \leqslant f\Big(\frac{2}{n}\Big), \quad \text{и т. д.}$$

Осталось их сложить и поделить обе части получившегося неравенства на $n-1$.

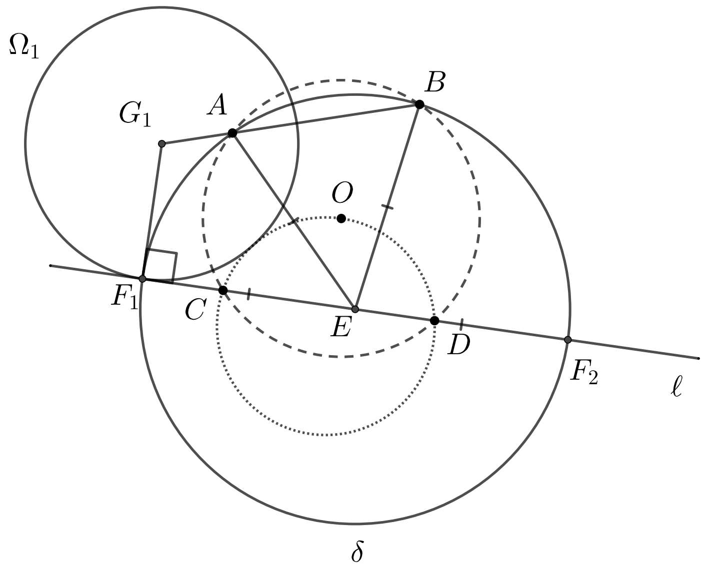
4. На самом деле таких окружностей будет даже две. Пусть переменная окружность, проходящая через точки A, B, называется ω.

Нашей целью будет построить окружности Ω_1 и Ω_2 так, чтобы они обе касались прямой ℓ и так, чтобы при инверсии относительно любой окружности ω обе окружности Ω_1 и Ω_2 переходили сами в себя. Поскольку прямая ℓ касается наших гипотетических окружностей Ω_1 и Ω_2, образ ℓ при инверсии относительно ω — это описанная окружность OCD — тоже будет касаться Ω_1 и Ω_2, что решит нам задачу.

Теперь предъявим построение Ω_1 и Ω_2. Рассмотрим точку E, лежащую на прямой ℓ, такую что $EA = EB$. Построим окружность δ с центром E и радиусом EA. Пусть точки пересечения δ с прямой ℓ называются F_1 и F_2. Выберем точку F_1 и построим в ней перпендикуляр к ℓ, и пусть этот перпендикуляр пересекает прямую AB в точке G_1. Построим окружность с центром G_1 радиуса G_1F_1. Это будет Ω_1.

Действительно, прямой ℓ окружность Ω_1 касается по построению. По свойству степени точки имеем $G_1F_1^2 = G_1A \cdot G_1B$, то есть, точки A и B переходят друг в друга при инверсии относительно Ω_1. Значит, любая окружность, проходящая через точки A, B, будет переходить в себя при инверсии относительно Ω_1. Но раз окружность ω переходит в себя при инверсии относительно Ω_1, окружность Ω_1 переходит в себя при инверсии относительно ω (так как и то, и то эквивалентно перпендикулярности ω и Ω_1), что и требовалось.

Окружность Ω_2 строится аналогично.



Младшая лига

1. П е р в о е р е ш е н и е. При $a = 0$ неравенство очевидно. Пусть $a \neq 0$. Доказываемое неравенство является произведением двух неравенств — «с плюсиками» и «с минусиками»:

$$(1+ab)(1+ac) \leqslant (1+a)(1+abc) \quad \text{и} \quad (1-a)(1-abc) \leqslant (1-ab)(1-ac).$$

Оба проверяются раскрытием скобок, сокращением на a, и разложением остального на множители. Например, раскроем скобки во втором неравенстве:

$$1 - a - abc + a^2bc \leqslant 1 - ab - ac + a^2bc,$$

перенесем все слагаемые в правую часть, получим неравенство $0 \leqslant 1 + bc - b - c$, т.е. $0 \leqslant (1-b)(1-c)$, что очевидно.

В т о р о е р е ш е н и е. Задачу можно также решить методом Штурма, используя тот известный факт, что сумма двух положительных чисел с данным произведением тем больше, чем больше их разность (потому что $(x+y)^2 = 4xy + (x-y)^2$). Частично раскроем скобки:

$$(1-a)(1+ab+ac+a^2bc)(1-abc) \leqslant (1+a)(1-ab-ac+a^2bc)(1+abc).$$

Зафиксируем a. Теперь, если заменить числа b и c на 1 и bc, в обеих частях неравенства обе крайние скобки не изменятся. При этом в силу сделанного наблюдения средняя скобка в левой части увеличится, а средняя скобка в правой части — уменьшится. Для доказательства неравенства теперь достаточно проверить его в случае, когда одна из переменных b или c (в силу симметрии можно считать, что b) равна 1. А при $b = 1$ неравенство принимает вид

$$(1-a)(1+a+ac+a^2c)(1-ac) \leqslant (1+a)(1-a-ac+a^2c)(1+ac)$$

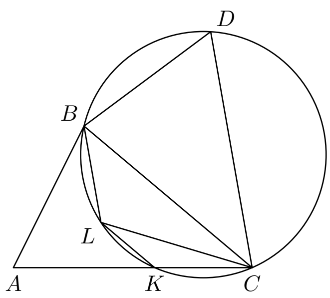
и обращается в равенство.

2. Ответ: при чётных n.

Разобьём 2^n последовательностей, которые может написать Маша, на пары последовательностей, переходящих друг в друга при операции «Мутабор», и отдельные последовательности, переходящие при такой операции в себя (их естественно назвать *палиндромами*). Аналогично разобьём 2^n последовательностей, которые может написать Таня, на пары последовательностей, переходящих друг в друга при операции «Мутабор», и отдельные последовательности, переходящие при этой операции в себя (их мы назовём *антипалиндромами*). Чтобы успешно показывать фокус, Таня и Серёжа должны сопоставить каждой последовательности s Маши последовательность $f(s)$, которую будет писать Таня в ответ на s. При этом разным s должны быть сопоставлены разные $f(s)$. Кроме того, поскольку Маша может говорить «Мутабор», последовательностям, образующим пару, должны быть сопоставлены последовательности, также образующие пару — и, следовательно, палиндромам должны быть сопоставлены антипалиндромы.

При нечётном $n = 2k+1$ антипалиндромов нет (потому что b_{k+1} не может быть равно $1 - b_{k+1}$), а палиндромы есть (например, последовательности, в которых все цифры одинаковы). Поэтому сопоставить палиндромам антипалиндромы нельзя, и фокус показать тоже не получится.

При чётном $n = 2k$ палиндромов и антипалиндромов по 2^k (потому что те и другие однозначно задаются первыми k членами последовательности), а остальные последовательности и у Маши, и у Тани разбиваются на $(2^n - 2^k)/2$ пар. Значит, Таня с Серёжей могут просто составить список всех последовательностей, установить требуемое взаимно-однозначное соответствие и показать Маше фокус.



3. Пусть точка D симметрична точке A относительно прямой BC. Тогда $\angle BDC = \angle BAC$, значит, $\angle BDC + \angle BLC = 180°$, т. е. четырехугольник $BDCL$ вписанный. Обозначим через K' вторую точку пересечения описанной окружности четырехугольника $BDCL$ с прямой AC. Заметим, что $\angle LBC = \angle BCD = \angle BCA$ (первое равенство из параллельности, второе — из симметрии точек A и D). Это равенство углов означает, что четырехугольник $LBCK'$ — равнобедренная трапеция, $LK' \parallel BC$, и поэтому $K = K'$. Тогда $BK = BD$, так как на эти хорды опираются одинаковые углы, а $BD = AB$ из симметрии.

4. О т в е т: выигрывает первый игрок.

Заметим, что $n^{10} + 1 = n(n-1)\bigl(n^8 + n^7 + \ldots + n + 1\bigr) + n + 1$.

Проверим, что в этой игре выигрышные позиции (их надо оставлять противнику) — это позиции, где количества камней во всех кучах дают остатки от 1 до $n-1$ при делении на $n(n-1)$. Из этого сразу следует, что первый выигрывает.

Действительно, финальные позиции (из которых нет хода) — это позиции, где во всех кучах от 1 до $n-1$ камней, т.е. они относятся к рассматриваемому типу.

Далее заметим, что из выигрышной позиции невозможно сделать ход в выигрышную же позицию. Действительно, сумма n остатков, которые дают при делении на $n(n-1)$ количества камней в кучах, составляющих выигрышную позицию – это число от n до $n(n-1)$, поэтому эта позиция не могла быть получена разделением кучи, принадлежащей другой выигрышной позиции.

Наконец, заметим, что если позиция не выигрышная, то количество камней хотя бы в одной из куч даёт при делении на $n(n-1)$ остаток от n до $n(n-1)$, а такую кучу нетрудно разделить на n куч, в которых количества камней дают при делении на $n(n-1)$ остатки от 1 до $n-1$.