МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА–2022» (математика)

Второй день

Якутск 2022

Сборник содержит задачи XXIX Международной олимпиады школьников «Туймаада» по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: А. С. Голованов, К. С. Иванов, К. П. Кохась, Ф. В. Петров. Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

Старшая лига

5. Докажите, что квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ (где $a, b \in \mathbb{R}$) не может принимать в десяти последовательных целых точках значения, равные степеням двойки с целым неотрицательным показателем. (*Ф. Петров*)

6. Костя отметил на координатной плоскости точки $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(0,0)$. На катетах треугольника ABC он отметил точки с координатами $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0)$, $\ldots$, $(\frac{1}{n+1}, 0)$ и $(0, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{3})$, $\ldots$, $(0, \frac{1}{n+1})$. После этого Костя попарно соединил прямолинейными отрезками все отмеченные точки. Саша нарисовал клетчатый прямоугольник $1 \times n$ и тоже попарно соединил прямолинейными отрезками все целочисленные точки, лежащие на его границе. В результате и треугольник, и прямоугольник разбиты проведенными отрезками на многоугольники. У кого получилось больше многоугольников разбиения — у Саши или у Кости? (*М. Алексеев*)

7. Прямоугольник $1 \times 5n$ клеток разбивают на *плитки*, каждая из которых — это либо отдельная клетка, либо «рваная доминошка», которая состоит из двух клеток, между которыми лежит четыре клетки (не принадлежащие этой доминошке). Докажите, что количество таких разбиений является точной пятой степенью. (*К. Кохась*)

8. В остроугольном треугольнике ABC точки C_m, A_m, B_m являются серединами сторон AB, BC, CA соответственно. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка P, что $\angle PCB = \angle B_mBC$ и $\angle PAB = \angle ABB_m$. Через точку P проведена прямая, перпендикулярная AC и пересекающая медиану BB_m в точке E. Докажите, что точка E лежит на описанной окружности треугольника $A_mB_mC_m$. (*К. Иванов*)

Младшая лига

5. В каждой строке таблицы 24×8 выписана перестановка чисел от 1 до 8. После этого в каждом столбце числа перемножены. Какое наименьшее значение может иметь сумма полученных произведений? (*C. Wu*)

6. В городе Невозвращенск N автобусных остановок, пронумерованных числами от 1 до N. Каждый автобусный маршрут имеет ровно две остановки: начальную и конечную, автобус едет только в одну сторону, а вся автобусная сеть устроена так, что с какой бы остановки вы ни уехали, вернуться на нее, пользуясь автобусами, не удастся.

Когда мэр замечает маршрут, ведущий от остановки с бóльшим номером к остановке с меньшим, он приказывает поменять местами таблички с номерами начальной и конечной остановок маршрута. Могут ли перестановки табличек продолжаться бесконечно? (*К. Иванов*)

7. Точка M — середина стороны AB равностороннего треугольника ABC. На стороне BC выбрана такая точка D, что $BD : DC = 3 : 1$. На прямой, проходящей через точку C параллельно MD, внутри ABC нашлась такая точка T, что $\angle CTA = 150°$. Найдите угол MTD. (*К. Иванов*)

8. Вдоль дороги стоит 8 столбов. Воробей стартует с первого столба, каждую минуту он перелетает на один из соседних. Пусть $a(n)$ — количество способов через $2n+1$ перелётов оказаться на последнем столбе (считаем, что $a(m) = 0$ при $m < 3$). Докажите, что при всех $n \geqslant 4$ $a(n) - 7a(n-1) + 15a(n-2) - 10a(n-3) + a(n-4) = 0$. (*Т. Амдеберхан, Ф. Петров*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Старшая лига

5. Как нетрудно проверить, любой квадратный трехчлен $f(x)$ с единичным старшим коэффициентом удовлетворяет соотношению

$$f(k+3) - f(k+2) - f(k+1) + f(k) = 4.$$

Допустим, что такие 10 точек нашлись. Тогда по крайней мере 5 из этих точек приходятся на промежуток возрастания (или убывания) трехчлена. Для определенности будем считать, что это промежуток, где трехчлен возрастает. Пусть максимальное значение трехчлена в этих точках равно 2^n (где $n \geqslant 4$). Тогда

$$4 = f(k+3) - f(k+2) - f(k+1) + f(k) \geqslant 2^n - 2^{n-1} - 2^{n-2} + 1 \geqslant 16 - 8 - 4 + 1 = 5.$$

Противоречие.

6. О т в е т: при всех n у Кости на один многоугольник разбиения больше.

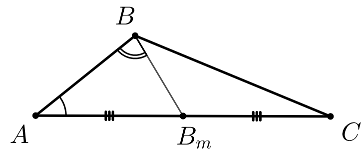
Замена прямоугольника $1 \times n$ прямоугольником $\sqrt{2} \times n$, разумеется, не изменит ответа (если, как и в исходном прямоугольнике, отмеченные точки разбивают стороны длины n на n равных частей). Расположим этот прямоугольник в пространстве так, чтобы его вершины находились в точках $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,0,n)$ и $(0,1,n)$. При этом отмечены будут точки с координатами $(1,0,k)$ и $(0,1,k)$, $0 \geqslant k \geqslant n$.

Спроецируем этот прямоугольник на плоскость $z = 0$ из точки $(0,0,-1)$. При такой проекции точки $(1,0,k)$ и $(0,1,k)$ перейдут в $(\frac{1}{k+1},0,0)$ и $(0,\frac{1}{k+1},0)$. При этом окажется, что на плоскости $z = 0$ нарисован исходный треугольник, на сторонах которого отмечены те же точки, что и в условии, кроме вершины в начале координат. Разрезание прямоугольника таким образом перейдёт в разрезание треугольника за вычетом одной части, примыкающей к началу координат. Поэтому в разрезании треугольника на один кусок больше.

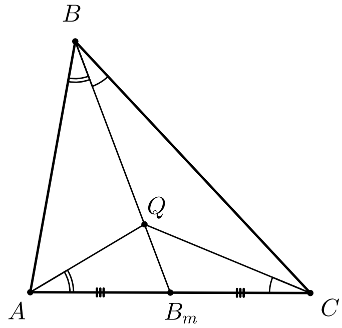
См. об этом сказку, приведенную в конце брошюры.

7. Для каждого $r = 1,2,3,4,5$ клетки с номерами $k \bmod 5$ объединим в один прямоугольник $1 \times n$. Мы получим 5 прямоугольников, каждый из которых разбит на отдельные клеточки и обычные доминошки (обе клетки рваной доминошки попадают в один прямоугольник и образуют в нем доминошку из двух соседних клеток). И обратно: по пяти разбиениям прямоугольников $1 \times n$ реконструируется разбиение исходного прямоугольника $1 \times 5n$. Таким образом, число разбиений из условия задачи равно пятой степени количества разбиений прямоугольника $1 \times n$ на отдельные клеточки и домино.

8. Л е м м а. В остроугольном треугольнике ABC медиана $BB_m > AC/2$.



Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если бы выполнялось неравенство $BB_m \leqslant AC/2$, то в треугольнике ABB_m $AB_m \geqslant BB_m$, т.е. $\angle ABB_m \geqslant \angle BAB_m$. Аналогично $\angle CBB_m \geqslant \angle BCB_m$. Складывая эти два неравенства, получаем, что $\angle ABC \geqslant \angle BAC + \angle BCA$, т.е, $2\angle ABC \geqslant \angle BAC + \angle BCA + \angle ABC = 180°$, или $\angle ABC \geqslant 90°$, что невозможно по условию. $\square$

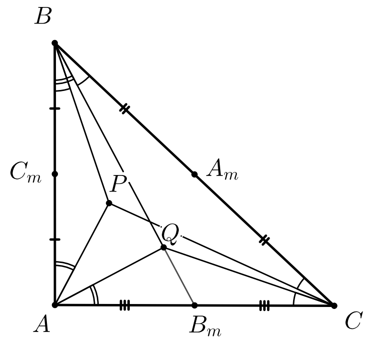


Приступим к решению задачи. По лемме $AB_m < BB_m$, значит, на отрезке BB_m можно отметить точку Q такую, что

$$\frac{1}{2}AC = QB_m = \frac{AB_m^2}{BB_m} = \frac{AB_m}{BB_m} \cdot AB_m < 1 \cdot AB_m < BB_m.$$

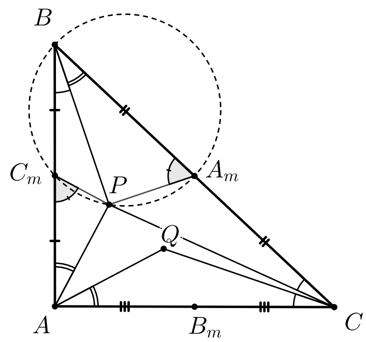
Из равенства $QB_m = \dfrac{AB_m^2}{BB_m}$ или, что эквивалентно, $\dfrac{QB_m}{AB_m} = \dfrac{AB_m}{BB_m}$, следует подобие треугольников QAB_m и ABB_m и, как следствие, равенство углов

$$\angle QAB_m = \angle ABB_m. \qquad (*)$$

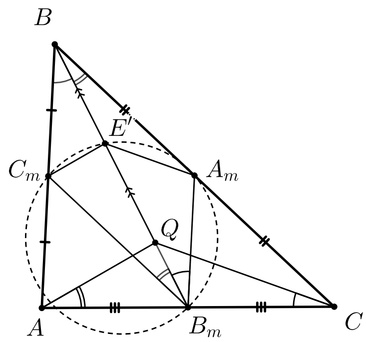


Аналогично $\angle QCB_m = \angle CBB_m$. Предлагаем читателю получить это равенство углов, найдя степень удачно выбранной точки.

Пусть $\angle CBB_m = \alpha$, $\angle ABB_m = \beta$. Тогда по условию $\angle PAB = \beta$ и в силу $(*)$ $\angle QAC = \beta$. Аналогично $\angle PCB = \alpha$, $\angle QCA = \alpha$. Следовательно, точки Q и P изогонально сопряжены. Значит, $\angle ABP = \alpha$ и $\angle PBC = \beta$



Таким образом, в треугольниках ABP и BCP равны углы $\angle PAB = \angle PBC = \beta$ и $\angle PBA = \angle PCB = \alpha$. Значит, треугольники ABP и BCP подобны и $\angle AC_mP = \angle BA_mP$ как углы между соотвтетвенными элементами треугольника. Следовательно, четырёхугольник BA_mPC_m вписанный.



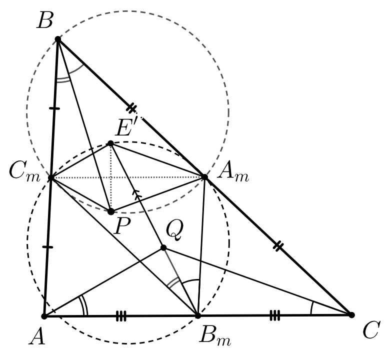
Пусть E' — середина отрезка BQ. Тогда $E'C_m$ и $E'A_m$ — средние линии треугольников ABQ и CBQ, $E'C_m \parallel AP$ и, как следствие, $\angle C_mE'A_m = \angle AQC = 180° - \alpha - \beta$. Поскольку $BA_mB_mC_m$ — параллелограмм, $\angle A_mB_mC_m = \angle A_mBC_m = \alpha+\beta$, $\angle BB_mC_m = \beta$ и $BB_mA_m = \alpha$.

Таким образом,

$$\angle C_mE'A_m + \angle C_mB_mA_m = \\ = 180° - \alpha - \beta + \alpha + \beta = 180°,$$

что означает, что $E'A_mB_mC_m$ — вписан в окружность.

Теперь заметим, что треугольники BC_mA_m и $B_mA_mC_m$ равны, поэтому равны радиусы их описанных окружностей. Заметим также, что на хорды $E'C_m$ и PC_m этих равных окружностей опираются одинаковые углы β, а на хорды $E'A_m$ и PA_m — одинаковые углы α, поэтому $E'C_m = PC_m$ и $E'A_m = PA_m$. Но тогда C_mA_m — серединный перпендикуляр к PE', то есть $E'P \perp C_mA_m \parallel AC$, поэтому E' совпадает с точкой E из условия, что и требовалось.



Младшая лига

5. Ответ: $8\cdot(8!)^3$. Обозначим через $P_1, \ldots, P_8$ произведения чисел в столбцах. Тогда по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_8 \underset{(1)}{\geqslant} 8\sqrt[8]{P_1P_2\ldots P_8} \underset{(2)}{=} 8\sqrt[8]{(8!)^{24}} = 8\cdot(8!)^3.$$

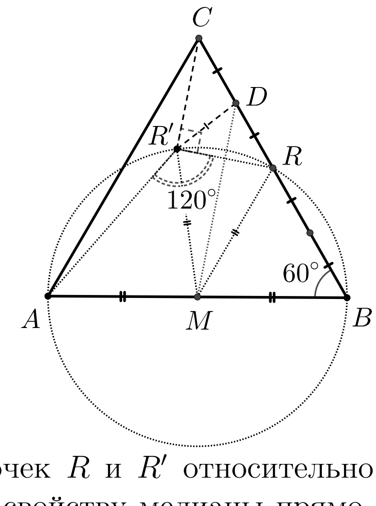
Здесь равенство (2) выполнено в силу того, что под корнем написано произведение всех чисел таблицы. В неравенстве о средних равенство достигается в случае, когда все переменные равны. Таким образом, неравенство (1) превращается в равенство, если $P_1 = P_2 = \ldots = P_8$, и поскольку этот случай легко реализовать, расставив в таблице по три раза произвольную перестановку и все ее циклические сдвиги, он и доставляет минимум суммы произведений.

6. При перестановке табличек мы можем считать, что табличку с бóльшим номером доставляют на конечную остановку на автобусе. Тогда табличка с номером N будет перемещена конечное количество раз. Действительно, если бы табличка с номером N совершила бесконечное количество перемещений, то из-за того, что количество остановок конечно, табличка с номером N в какой-то момент посетила бы остановку, в которой уже была, что противоречит условию.

После последнего перемещения таблички с номером N проделаем аналогичное рассуждение с табличкой с номером $N-1$, и так далее, вплоть до таблички с номером 1. Таким образом, все таблички в какой-то момент времени перестанут участвовать в перестановках, т. е. процесс остановится.

7. Ответ: $120°$.

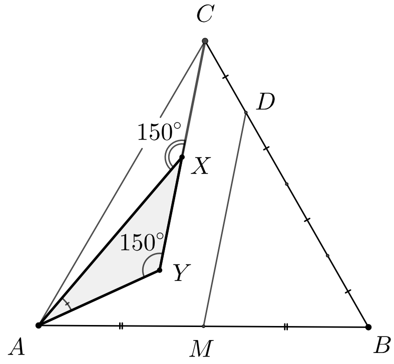
Пусть R — середина BC. Вместо точки T рассмотрим точку R', симметричную R относительно DM. Мы докажем, что $CR' \parallel DM$, и что $\angle AR'C = 150°$, а в финале мы докажем, что существует лишь одна точка внутри треугольника, задаваемая такими условиями, из чего будет следовать, что $R' = T$.



0. Найдём ответ. Из равенств $RB = MB = AB/2$ и $\angle RBM = \angle CBA = 60°$ получаем, что треугольник RBM — равносторонний. Поэтому $\angle MRB = 60°$ и $\angle DRM = 180° - \angle MRB = 120°$. Из-за симметрии искомый угол $\angle DR'M = \angle DRM = 120°$.

1. Докажем, что $CR' \parallel DM$. В силу симметрии точек R и R' относительно прямой DM имеем $DM \perp R'R$ и $R'D = RD$. Тогда по свойству медианы прямоугольного треугольника из равенств $R'D = RD = CD$ следует, что $\angle CR'R = 90°$, т. е. $CR' \perp R'R \perp DM$.

2. Докажем, что $\angle AR'C = 150^\circ$. В силу симметрии $MR' = MR = AB/2 = AM$, т.е. точки A, R', R, B лежат на окружности с диаметром AB и тогда $\angle AR'R = 180^\circ - \angle ABR = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Как мы уже замечали ранее, $\angle CR'R = 90^\circ$. Поэтому из равенства $\angle AR'R + \angle RR'C + \angle CR'A = 360^\circ$ получаем, что $\angle AR'C = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ = 150^\circ$.



3. Докажем, что точка R' совпадёт с T. Предположим, что это не так. Тогда на прямой, проведённой из C параллельно DM, нашлись две различные точки R' и T такие, что $\angle ATC = \angle AR'C = 150^\circ$. Обозначим через X ту из них, что лежит ближе к C, а через Y — ту, которая дальше. Тогда угол AXC — внешний в треугольнике AXY, поэтому

$$150^\circ = \angle AXC = \angle AYX + \angle XAY > \angle AYX = \angle AYC = 150^\circ.$$

Противоречие.

8. Введем чуть более громоздкие обозначения. Пусть $b_k(n)$ — это количество способов оказаться на k-м столбе после n перелётов. Тогда очевидно $b_k(n) = 0$, если числа k и n одинаковой четности, и

$$\begin{aligned} &b_k(n) = b_{k-1}(n-1) + b_{k+1}(n-1) \quad \text{при } 1 < k < 8, \\ &b_1(n) = b_2(n-1), \\ &b_8(n) = b_7(n-1). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Очевидно, $a(n) = b_8(2n+1)$. Тогда

$$\begin{aligned} a(n) - 7a(n-1) &= b_8(2n+1) - 7b_8(2n-1) = \\ &= b_7(2n) - 7b_8(2n-1) = \\ &= \big(b_6(2n-1) + b_8(2n-1)\big) - 7b_8(2n-1) = \\ &= b_6(2n-1) - 6b_8(2n-1) = \\ &= b_5(2n-2) - 5b_7(2n-2). \end{aligned}$$

Добавим к объектам нашего внимания $a(n-2)$ и продолжим понижение количества перелетов, активно пользуясь формулами $(*)$:

$$\begin{aligned} a(n) - 7a(n-1) + 15a(n-2) &= b_5(2n-2) - 5b_7(2n-2) + 15b_8(2n-3) = \\ &= b_4(2n-3) - 4b_6(2n-3) + 10b_8(2n-3) = \\ &= b_3(2n-4) - 3b_5(2n-4) + 6b_8(2n-4). \end{aligned}$$

Ну и дальше в таком же духе

$$\begin{aligned} &a(n) - 7a(n-1) + 15a(n-2) - 10a(n-3) = \\ &\qquad = b_3(2n-4) - 3b_5(2n-4) + 6b_8(2n-4) - 10b_8(2n-5) = \\ &\qquad = b_2(2n-5) - 2b_4(2n-5) + 3b_6(2n-5) - 4b_8(2n-5) = \\ &\qquad = b_1(2n-6) - b_3(2n-6) + b_5(2n-6) - b_7(2n-6). \end{aligned}$$

И наконец, переходя к статистикам $2n-7$ перелетов, получаем

$$\begin{aligned} &a(n) - 7a(n-1) + 15a(n-2) - 10a(n-3) + a(n-4) = \\ &\qquad = b_1(2n-6) - b_3(2n-6) + b_5(2n-6) - b_7(2n-6) - b_8(2n-7) = 0. \end{aligned}$$

Портрет дедушки

Бусенька приоткрыла дверь и заглянула в Ам-бар. Всюду был беспорядок, умеренный, но бессистемный. Огрыза сидела за столом и отрешенно передвигала по столу ореховые скорлупки. Рядом стоял дятел Спятел, уставившись в точку, находившуюся где-то возле полок с сушеными корешками. Бусенька подошла поближе.

— Это уже третья фисташка! — горестно сказала Огрыза. — Я ее грызу, но настроение все равно не повышается. Такой удар...

— Что случилось? — прошептала Бусенька.

— Я столько сил потратила на создание Визуальной Карты Запасов... Так старалась, так продумывала детали... И вот сегодня фирма «Ректангуляр Пендикуляр» отозвала лицензию на рисование прямоугольников! Моя прекрасная карта... Я больше не смогу ее нарисовать на компьютере!

— Какая карта?

— Вот эта, — объяснил дятел Спятел, показывая на пустой белый экран на стене. — Портрет дедушки.

— Портрет дедушки? — переспросила Бусенька, посмотрев на пустую стену.

— Да, — подтвердила Огрыза, всхлипнув.

— Какого дедушки?

— Кузькиного, — уточнил дятел Спятел, смахивая слезу.

— Так, — сказала Бусенька. — Надо держаться за реальность. Я нахожусь в Амбаре, рядом находятся дятел Спятел и Огрыза, и у Огрызы пропала визуальная карта запасов «Портрет Кузькиного дедушки».

— В виде рыцаря в синих доспехах... — зарыдала Огрыза.

— Кажется, кто-то из нас спятил, — неуверенно предположила Бусенька, — пожалуй, тебе стоит съесть еще одну третью фисташку. Да и мне не помешает.

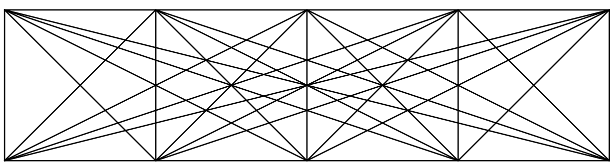
— Понимаешь, весь учет Ам-бара я вела в огромном гроссбухе. Надоело! Он морально устарел еще в начале прошлого века. Я решила кардинально обновить способ учета, сделать его наглядным и красивым. И как раз в это время я выкинула старый шкаф, стоявший у стенки.

— Помню, — сказала Бусенька, — на одной из его полок лежала коробка с воздушными шариками...

— Освободился большой кусок стены — и меня осенило! Вместо скучных таблиц приходов-расходов я решила нарисовать картину, на которой будет схематически показано всё, что хранится в Ам-баре. Тут как раз пришел дятел Спятел и убедил меня, что абстрактная живопись подходит для этого куда лучше пейзажа или натюрморта.

— Я и сейчас так считаю, — подтвердил дятел Спятел. — Нужно нарисовать мозаичную картинку и каждой клеточке этой мозаики сопоставить полку, вешалку или коробку, а цветом клеточки обозначить, что на ней лежит-висит-хранится. И заметьте: никто не станет вас спрашивать «почему у персонажа на картине красные уши»!

— А потом пришел Кузька и сказал, что они, насекомые, ввиду почти полного отсутствия мозга, часто находят сложные вещи там, где никому в голову не придет их искать. Он нарисовал прямоугольник из нескольких клеточек и провел в нем кучу диагональных линий. Получилась очень непростая картинка.



Мне понравилось! Я устроила инвентаризацию, и оказалось, что число занятых полок как раз равно числу кусочков на этой картинке. Несколько дней работы — и визуальная карта была готова! Проектор показывал ее прямо на этой стене. Красотища!

— А причем тут дедушка?

— Когда Кузька увидел карту, — объяснила Огрыза, — он сказал, что она очень похожа на портрет его дедушки.

— Какого еще дедушки? Никогда не слышала про Кузькиного дедушку.

— Мы тоже не слышали, — сказал дятел Спятел. — Но дедушка у Кузьки был. Это факт. И судя по всему, он был очень героический и очень легендарный.

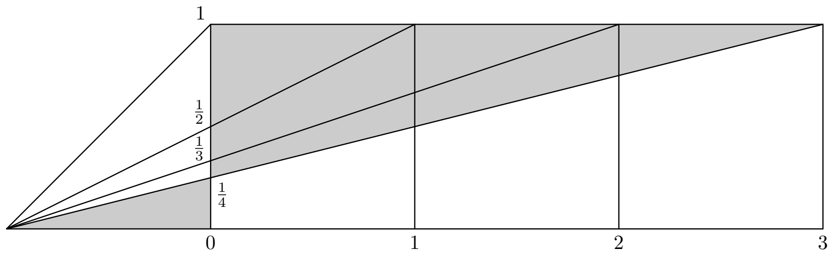
— Интересно было бы взглянуть... — сказала Бусенька.

— Это совершенно невозможно! — снова зарыдала Огрыза. — Без лицензии мы не имеем права рисовать на компьютере ни одного прямоугольника. Столько труда пропало даром!

— Жаль... — сказала Бусенька. — А треугольники? Треугольники рисовать можно?

— Можно.

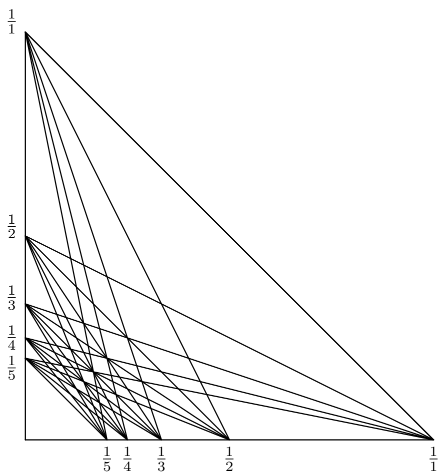
— Ну хоть что-то. Попробуем разработать теоретическую модель, — и Бусенька стала рисовать на бумажке какой-то геометрический чертеж.



— Смотрите, как здорово получается, — сказал Бусенька, — здесь два серых треугольника: у левого горизонтальная сторона равна 1, а вертикальная — 1/4, а правый треугольник в 3 раза крупнее — у него вертикальная сторона равна 3/4, а горизонтальная — 3!

— Идея выглядит интересной, — прокомментировал дятел Спятел, — но я пока не понимаю к чему это.

— Сейчас всё станет ясно, — сказала Бусенька. — За дело! — И она стала рисовать проект новой карты.



— Хитрая картинка, — похвалила Огрыза, — что-то мне подсказывает, что клеточек на ней ровно столько, сколько мне требуется.

— Именно так, — ответила Бусенька. — Давайте теперь её раскрасим. Ты сказала, что выводила картинку проектором? Значит, у тебя в компьютере сохранилась какая-то заготовка?

— Сохранилась, — ответила Огрыза, — только толку от нее теперь никакого.

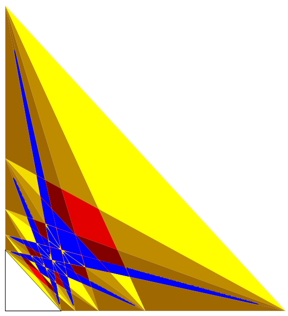
— Будет тебе толк, зови Кузьку для проверки. А ты, — обратилась она к дятлу Спятлу, — подвинь, пожалуйста, стол ближе к стене и положи на него вон то большое зеркало.

— Зеркало? — удивился дятел Спятел, снимая зеркало со стены. — Что мы будем в нем наблюдать?

— Мы выведем картинку проектором прямо на стол, — объяснила Бусенька, не отрываясь от компьютера, — а зеркало отразит ее на стену!

Вскоре Огрыза вернулась с Кузькой. Кузька с любопытством смотрел, как Бусенька устанавливает над зеркалом проектор.

— Что это? — спросил Кузька, посмотрев на экран компьютера.



— Как что? Это портрет твоего дедушки!

— Ты хочешь сказать, что этот противный клоп — мой дедушка??

— Ты, Кузька, смотришь на этот вопрос поверхностно. А надо смотреть объемно! — сказала Бусенька и включила проектор.

— Дедушка... — растерянно пробормотал Кузька, глядя на появившуюся на стене картину.