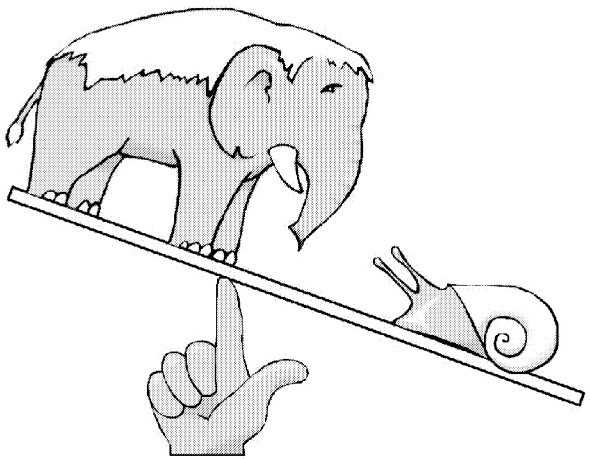
**Министерство образования и науки Республики Саха (Якутия)**
**Малая академия наук Республики Саха (Якутия)**
**Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова**

# XXIX Международная олимпиада «Туймаада»

## Физика

### Теоретический тур

**Методическое пособие (электронное издание)**



**Якутск, 30 июня — 10 июля 2022 г.**

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Министерства образования Республики Саха (Якутия)
и Северо-восточного федерального университета им. М.К. Аммосова.
Телефон: (4112) 496862.
E-mail: achudn@mail.ru, grigyum@yandex.ru.

## Авторы задач

| Младшая лига | Старшая лига |
|---|---|
| 1. Манаков А. И., Чудновский А. В. | 1. См. зад. 1 мл. лиги. |
| 2. Чудновский А. В. | 2. См. зад. 2 мл. лиги. |
| 3. Чудновский А. В. | 3. См. зад. 3 мл. лиги. |
| 4. Аванесян Р. Е. | 4. Власов А. И. |
| 5. Варламов С. Д. | 5. См. зад. 5 мл. лиги. |
| 6. Ермилов М. М. | 6. См. зад. 6 мл. лиги. |
| 7. Власов А. И. | 7. См. зад. 7 мл. лиги. |
| | 8. Варламов С. Д. |

Общая редакция — Чудновский А. В.
Перевод — Боякинов Е. Ф.
Оформление и вёрстка — Чудновский А. В.
Коррекция — Боякинов Е. Ф.
Ответственный за комплект задач — Григорьев Ю. М.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система LaTeX $2_\varepsilon$.

Подписано в печать 02.07.2022 в 09:35.
677016, г. Якутск, ул. Белинского, д. 58
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

# XXIX Международная олимпиада «Туймаада»

Ежегодно в июле в столице Республики Саха (Якутия) — городе Якутск — проходит Международная олимпиада школьников «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии. Олимпиаду организует Министерство образования РС (Я) и Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова на базе физико-математического форума «Ленский край». В разные годы в олимпиаде принимали участие школьники из Азербайджана, Бельгии, Болгарии, Германии, Казахстана, Китая, Кыргызстана, Мексики, Монголии, Румынии, США, Таиланда,Турции, Франции, Южной Кореи и, конечно, из разных регионов России, включая Москву, Санкт-Петербург, Челябинск и другие города. Также в «Туймааде» регулярно участвуют члены сборной России и призёры заключительного этапа Всероссийских олимпиад.

Согласно действующему положению олимпиада по физике включает в себя две лиги: старшую и младшую. К участию в младшей лиге допускаются школьники, окончившие не более 9 классов среднего учебного заведения; к участию в старшей лиге допускаются все школьники. Задачи старшей лиги по программе и сложности соответствуют Международной физической олимпиаде, а задачи младшей лиги — 9 классу Всероссийской олимпиады.

---

# XXIX International olympiad "Tuymaada"

Every year in July in the capital of the Republic of Sakha (Yakutia), the city Yakutsk, the International School Physics, Mathematics, Informatics and Chemistry Olympiad «Tuymaada» takes place. The Olympiad is organized by the Republic Sakha's (Yakutia) Department of Education and North-Eastern Federal University n.a. M.K. Ammosov on the base of the physico-mathematical forum «Lensky District». In different years students from Azerbaijan, Belgium, Bulgaria, China, France, Germany, Kazakhstan, Kyrgyzstan, Mexico, Mongolia, Romania, South Korea, Thailand, Turkey, the USA and, of course, from different regions of Russia, including Moscow, Saint-Petersburg, Chelyabinsk and other cities, took part in the Olympiad. Also members of Russian national team and prizewinners of final stage of All-Russian Olympiads regularly participate in «Tuymaada».

According to current regulations, Physics Olympiad includes two leagues: senior league and junior league. Schoolchildren are allowed to participate in the junior league, graduated from no more than 9 classes of a secondary educational institution; all students are eligible to participate in the senior league. Senior league problems correspond in programm and difficulty to those of International Physics Olympiad, junior league problems — to those of 9th class of All-Russian Olympiad.



# Младшая лига

### Задача 1. Центр масс загружаемой платформы

Платформа массой $M = 2000$ кг и длиной $L = 80$ м движется без трения с начальной скоростью $v_0 = 1$ м/с. Когда платформа уже на 3/4 своей длины проехала загрузочный люк, тот открылся и из него начал сыпаться щебень с расходом $\mu = 100$ кг/с. Найдите скорость $v_c(t)$ центра масс системы, состоящей из платформы и высыпавшегося щебня, в зависимости от времени после открытия люка. Приведите ответ в общем виде и для указанных численных данных.

### Задача 2. Раскручивание резинового кольца

Тонкое кольцо из резины плотностью $\rho = 1500$ кг/м$^3$ надели на шершавый цилиндр немного большего диаметра, так что кольцо растянулось и в нём возникло механическое напряжение $T = 6$ кПа. До какой максимальной линейной скорости $v$ можно раскрутить кольцо, вращая цилиндр вокруг своей оси? Другие тела с кольцом не взаимодействуют.

### Задача 3. Неоднородный цилиндр

Неоднородный цилиндр радиусом $R$ первоначально покоился на горизонтальной плоскости, касаясь её вдоль своей образующей, вблизи положения неустойчивого равновесия. Максимальная скорость оси цилиндра в процессе его последующего движения составила $v_0$. Найдите зависимость скорости $v$ оси цилиндра от её горизонтального смещения $x$, а также максимальное ускорение $a_0$ оси цилиндра. Проскальзывания и трения качения нет.

### Задача 4. Нагревание шариками

Вода общей теплоёмкостью $C_1$ находится в калориметре при температуре $T_0 = 20°$C. В воду поочерёдно помещают по одному шарику общей теплоёмкостью $C_2 = 0{,}1C_1$ при температуре $T = 80°$C, дожидаются установления термодинамического равновесия и вынимают шарик, после чего повторяют процесс с другим таким же шариком. При помещении какого по счёту шарика температура воды пересечёт отметку $T_x = 50°$C? Теплоёмкость калориметра и тепловые потери не учитывайте.

### Задача 5. Нагрев электромоста

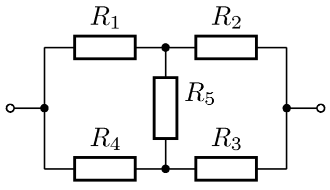


Рис. 1

Из разных кусков нихромовой проволоки, покрытой одинаковой изоляцией одной и той же толщиной, изготовили пять резисторов, соединили их по мостовой схеме (рис. 1) и подключили к источнику постоянного напряжения. В каждом из четырёх описанных ниже опытов найдите разность между максимальной и минимальной температурами резисторов, если температура центрального резистора в тот же момент времени была выше комнатной на $\Delta T_5 = 10$ мК. В качестве ответа укажите численные значения, округлённые до целого числа милликельвинов.

1. Диаметры всех кусков проволоки одинаковы, а длины пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через малое время после замыкания цепи.
2. Диаметры всех кусков проволоки одинаковы, а длины пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через большое время после замыкания цепи.
3. Длины всех кусков проволоки одинаковы, а диаметры пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через малое время после замыкания цепи.
4. Длины всех кусков проволоки одинаковы, а диаметры пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через большое время после замыкания цепи.

### Задача 6. Космический луч

Луч света от далёкой звезды проходит сквозь газово-пылевую туманность, показатель преломления которой является функцией только от расстояния до центра туманности. Если бы преломления не было, то луч прошёл бы на расстоянии $H$ от центра туманности, но из-за преломления он прошёл на минимальном расстоянии $D$ от этого центра. Найдите показатель преломления $n_0$ в ближайшей точке траектории светового луча к центру туманности.

### Задача 7. Одноразовая идеальная линза

На плоскую поверхность плосковыпуклой линзы, изготовленной из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$ и расположенной в воздухе, падает вдоль нормали параллельный пучок лучей. Определите форму выпуклой поверхности линзы, если плоская имеет форму круга радиусом $R = 0{,}5$ м, а все преломлённые линзой лучи прошли через одну точку $F$, расположенную на расстоянии $f = 1$ м от ближайшей к ней точки $O$ линзы. В качестве ответа укажите толщину $H$ линзы (максимальное расстояние от точки выпуклой поверхности до плоской).



## Старшая лига

### Задача 1. Центр масс загружаемой платформы

Платформа массой $M = 2000$ кг и длиной $L = 80$ м движется без трения с начальной скоростью $v_0 = 1$ м/с. Когда платформа уже на 3/4 своей длины проехала загрузочный люк, тот открылся и из него начал сыпаться щебень с расходом $\mu = 100$ кг/с. Найдите скорость $v_c(t)$ центра масс системы, состоящей из платформы и высыпавшегося щебня, в зависимости от времени после открытия люка. Приведите ответ в общем виде и для указанных численных данных.

### Задача 2. Раскручивание резинового кольца

Тонкое кольцо из резины плотностью $\rho = 1500$ кг/м$^3$ надели на шершавый цилиндр немного большего диаметра, так что кольцо растянулось и в нём возникло механическое напряжение $T = 6$ кПа. До какой максимальной линейной скорости $v$ можно раскрутить кольцо, вращая цилиндр вокруг своей оси? Другие тела с кольцом не взаимодействуют.

### Задача 3. Неоднородный цилиндр

Неоднородный цилиндр радиусом $R$ первоначально покоился на горизонтальной плоскости, касаясь её вдоль своей образующей, вблизи положения неустойчивого равновесия. Максимальная скорость оси цилиндра в процессе его последующего движения составила $v_0$. Найдите зависимость скорости $v$ оси цилиндра от её горизонтального смещения $x$, а также максимальное ускорение $a_0$ оси цилиндра. Проскальзывания и трения качения нет.

### Задача 4. Адиабатное падение тяжёлого поршня

Тяжёлый поршень начинает адиабатное падение в вертикальном цилиндре, заполненном одноатомным идеальным газом (над поршнем вакуум). Отношение начальной силы давления газа на поршень к силе тяжести поршня является малой величиной $\varphi = 0{,}01$.

1. Оцените отношение $h = H_{\min}/H_0$ минимальной высоты $H_{\min}$ поршня над дном сосуда к начальной высоте $H_0$.
2. Оцените отношение $p = P_{\max}/P_0$ максимального давления $P_{\max}$ газа в цилиндре к начальному $P_0$.
3. Оцените отношение $t = T_{\max}/T_0$ максимальной температуры $T_{\max}$ газа в цилиндре к начальной $T_0$.

### Задача 5. Нагрев электромоста

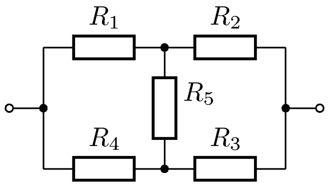



Рис. 2

Из разных кусков нихромовой проволоки, покрытой одинаковой изоляцией одной и той же толщиной, изготовили пять резисторов, соединили их по мостовой схеме (рис. 2) и подключили к источнику постоянного напряжения. В каждом из четырёх описанных ниже опытов найдите разность между максимальной и минимальной температурами резисторов, если температура центрального резистора в тот же момент времени была выше комнатной на $\Delta T_5 = 10$ мК. В качестве ответа укажите численные значения, округлённые до целого числа милликельвинов.

1. Диаметры всех кусков проволоки одинаковы, а длины пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через малое время после замыкания цепи.

2. Диаметры всех кусков проволоки одинаковы, а длины пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через большое время после замыкания цепи.

3. Длины всех кусков проволоки одинаковы, а диаметры пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через малое время после замыкания цепи.

4. Длины всех кусков проволоки одинаковы, а диаметры пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через большое время после замыкания цепи.

### Задача 6. Космический луч

Луч света от далёкой звезды проходит сквозь газово-пылевую туманность, показатель преломления которой является функцией только от расстояния до центра туманности. Если бы преломления не было, то луч прошёл бы на расстоянии $H$ от центра туманности, но из-за преломления он прошёл на минимальном расстоянии $D$ от этого центра. Найдите показатель преломления $n_0$ в ближайшей точке траектории светового луча к центру туманности.

### Задача 7. Одноразовая идеальная линза

На плоскую поверхность плосковыпуклой линзы, изготовленной из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$ и расположенной в воздухе, падает вдоль нормали параллельный пучок лучей. Определите форму выпуклой поверхности линзы, если плоская имеет форму круга радиусом $R = 0{,}5$ м, а все преломлённые линзой лучи прошли через одну точку $F$, расположенную на расстоянии $f = 1$ м от ближайшей к ней точки $O$ линзы. В качестве ответа укажите толщину $H$ линзы (максимальное расстояние от точки выпуклой поверхности до плоской).



### Задача 8. Проволочный куб

Вдоль рёбер куба различными способами прокладывают тонкую проволоку и пускают по ней ток. Индуктивность замкнутого контура из четырёх рёбер, принадлежащих одной грани, равна $L_{41}$. Индуктивность замкнутого контура из шести рёбер, принадлежащих двум смежным граням, равна $L_{62}$.

1. Найдите индуктивность $L_{63}$ замкнутого контура из шести рёбер, принадлежащих трём попарно смежним граням.

2. Найдите индуктивность $L_{83}$ замкнутого контура из восьми рёбер, принадлежащих трём граням, две из которых параллельны друг другу, а третья является смежной с каждой из двух других.

3. Вдоль рёбер двух противоположных граней проложены две замкнутые проволоки. По одному проволочному контуру идёт переменный ток силой $I(t) = I_0 \cos \omega t$. В другой проволочный контур вставлен идеальный маленький вольтметр. Найдите зависимость $U(t)$ показаний вольтметра от времени.

# Возможные решения

## Младшая лига

### Задача 1. Центр масс загружаемой платформы

Горизонтальные составляющие всех внешних сил, действующих на систему, равны нулю. Взаимодействие между платформой и высыпающимся щебнем является внутренним для рассматриваемой системы, поэтому оно не может повлиять на координату $x_c$ центра масс системы. Значит, зависимость $x_c(t)$ можно искать в отсутствие этого взаимодействия, считая, что щебень вываливается на землю, а платформа едет с постоянной скоростью:

$$x_c(t) = \frac{M \cdot (L/4 + v_0 t) + \mu t \cdot 0}{M + \mu t} = \frac{L}{4} \cdot \frac{1 + 4v_0 t/L}{1 + \mu t/M} = 20 \text{ м}.$$

Заметим, что при подстановке значений в общую формулу время $t$ сократилось за счёт выполнения соотношения между численными данными: $\mu L = 4Mv_0$. В этом случае платформа с щебнем будет двигаться, а центр масс — покоиться. В общем же случае найдём искомую скорость через производную координаты:

$$v_c(t) = \dot{x}_c(t) = v_0 \cdot \frac{1 - \dfrac{\mu L}{4Mv_0}}{\left(1 + \dfrac{\mu t}{M}\right)^2}.$$

### Задача 2. Раскручивание резинового кольца

Вращая цилиндр, можно сообщать кольцу ускорение при наличии ненулевой силы трения, что требует ненулевой силы $N$ нормальной реакции цилиндра, действующей на малую дугу $2\alpha$ резинового кольца (рис. 3). Пусть $R$ — радиус цилиндра, $S$ — площадь поперечного сечения резинового жгута, образующего кольцо, тогда второй закон Ньютона для рассматриваемой дуги, имеющей массу $m = \rho \cdot S \cdot 2\alpha R$, в проекции на направление центростремительного ускорения примет вид

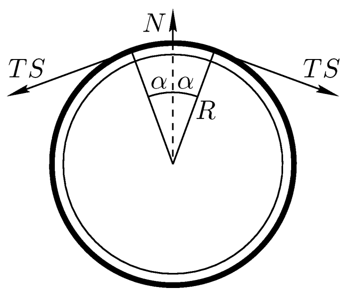


Рис. 3

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = 2 \cdot TS \cdot \sin\alpha - N \approx 2TS\alpha - N.$$

Максимальная скорость достигается при $N = 0$, откуда после подстановки выражения для $m$ получаем ответ:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 2 \text{ м/с}.$$



**Примечание.** Предлагаем читателям подумать о возможных причинах сходства полученного результата с формулой для скорости звуковой волны.

### Задача 3. Неоднородный цилиндр

1. Вдоль оси цилиндра не происходит никакого движения и не действуют никакие силы, поэтому задача сводится к плоской. Поместим начало системы координат $Oxy$ (рис. 4) в любую точку прямой, по которой в начальный момент касались цилиндр и плоскость. Если бы центр масс цилиндра находился на его оси, то положение равновесия было бы безразличным, а не неустойчивым. Значит, центр масс находится на некотором расстоянии $r_c > 0$ от оси цилиндра, причём в начальный момент располагался над осью.

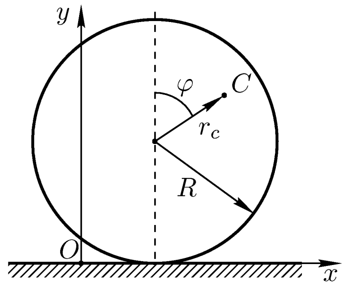


Рис. 4

2. Для расчёта кинетической энергии цилиндра мысленно разобьём его на много маленьких кусочков, занумерованных буквой $i$:

$$E = \sum_i \frac{m_i}{2}\left((v_{cx} + v_{ix})^2 + (v_{cy} + v_{iy})^2\right), \tag{1}$$

где $v_{cx}$ и $v_{cy}$ — соответствующие проекции скорости центра масс, $v_{ix}$ и $v_{iy}$ — проекции скоростей соответствующих кусочков массами $m_i$ в системе центра масс. Раскроем скобки в формуле (1):

$$E = \sum_i \frac{m_i}{2}(v_c^2 + v_i^2 + 2v_{cx}v_{ix} + 2v_{cx}v_{ix}), \tag{2}$$

где использованы соотношения $v_c^2 = v_{cx}^2 + v_{cy}^2$ и $v_i^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2$. В системе центра масс суммарный импульс равен нулю:

$$p_x = \sum_i m_i v_{ix} = 0, \qquad p_y = \sum_i m_i v_{iy} = 0.$$

Учитывая эти соотношения, преобразуем выражение (2):

$$E = \sum_i \frac{m_i}{2}(v_c^2 + v_i^2). \tag{3}$$

Можно было сразу записать это соотношение, сославшись на теорему Кёнига. В системе центра масс цилиндр вращается вокруг своей оси, следовательно, $v_i = \omega r_i$, где $\omega$ — угловая скорость, $r_i$ — расстояние от соответствующего кусочка до оси. Цилиндр не проскальзывает, поэтому $\omega = v/R$. Подставим формулы $v_i = vr_i/R$ и $v_c = vr_c/R$ в выражение (3):

$$E = \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\left(\frac{vr_c}{R}\right)^2 + \left(\frac{vr_i}{R}\right)^2\right) = Av^2,$$

где $A$ — константа, зависящая только от распределения масс цилиндра.

3. Пусть $\varphi$ — угол между направлением на центр масс и вертикалью (рис. 4). В произвольном положении из-за отсутствия проскальзывания справедливо соотношение $\varphi = x/R$ (с точностью до не играющего роли слагаемого кратного $2\pi$). Из закона сохранения энергии

$$E + W = Av^2 + Mgr\cos\varphi = 0 + Mgr = \mathrm{const}$$

выразим скорость:

$$|v| = \sqrt{\frac{Mgr}{A}(1-\cos\varphi)} = \sqrt{\frac{2Mgr}{A}}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| = v_0\left|\sin\left(\frac{x}{2R}\right)\right|.$$

Ось цилиндра будет совершать колебания так, что $x \in [0; 2\pi R]$. В разных полупериодах скорость будет иметь разный знак при одних и тех же $x$, то есть зависимость $v(x)$ неоднозначна:

$$v = \pm v_0 \sin\left(\frac{x}{2R}\right), \qquad x \in [0; 2\pi R].$$

4. Знак скорости не сказывается на величине максимального ускорения, поэтому для определённости выберем «+» и выразим ускорение:

$$a(x) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v_0\frac{\sin(\frac{x+\Delta x}{2R}) - \sin(\frac{x}{2R})}{\Delta t} = v_0\frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{4R}\right)\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{4R}\right)}{\Delta t} \approx$$

$$\approx \frac{v_0\Delta x}{2R\Delta t}\cos\left(\frac{x}{2R}\right) = \frac{v_0^2}{2R}\sin\left(\frac{x}{2R}\right)\cos\left(\frac{x}{2R}\right) = \frac{v_0^2}{4R}\sin\left(\frac{x}{R}\right).$$

Отсюда находим максимальное ускорение $a_0 = v_0^2/(4R)$.



## Задача 4. Нагревание шариками

Из уравнения теплового баланса при помещении первого шарика

$$C_1(T_1 - T_0) = C_2(T - T_1)$$

найдём новую равновесную температуру:

$$T_1 = \frac{C_1T_0 + C_2T}{C_1 + C_2}.$$

Это выражение имеет вполне ожидаемую форму среднего взвешенного (мы сталкиваемся с такой формой в самых разных ситуациях, например, аналогично находится скорость тел после абсолютно неупругого удара, координата центра масс системы, средняя плотность и т. д.), однако в данной задаче для расчётов удобнее перейти от температуры воды к её отличию от предельной (добавление каждого шарика приближает температуру воды к $T$).

Пусть $T_n$ — равновесная температура после помещения $n$-го шарика (отметим, что введённое в условии задачи обозначение $T_0$ отлично вписывается в эту систему), $\Delta T_n = T - T_n$ — отличие равновесной температуры от предельной, тогда уравнение теплового баланса можно переписать в виде

$$C_1(\Delta T_{n-1} - \Delta T_n) = C_2(\Delta T_n - 0),$$

откуда находим рекуррентное соотношение

$$\Delta T_n = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\cdot\Delta T_{n-1},$$

то есть последовательность $\Delta T_n$ образует геометрическую прогрессию:

$$\Delta T_n = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^n\cdot\Delta T_0.$$

Искомый номер шарика — это наименьшее целочисленное значение $n$, при котором выполняется условие

$$\left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^n\cdot(T - T_0) < T - T_x,$$

которое равносильно неравенству

$$n > \frac{\ln\left(\dfrac{T - T_0}{T - T_x}\right)}{\ln\left(1 + \dfrac{C_2}{C_1}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}1} \approx 7{,}3.$$

Таким образом, окончательный ответ: $n = 8$.

### Задача 5. Нагрев электромоста

Обозначим через $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$ и $I_5$ силы токов, текущих через соответствующие резисторы, и будем считать положительными направления, указанные на схеме стрелочками (рис. 5).

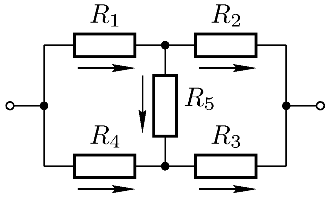


Рис. 5

Из формулы для удельного сопротивления следует, что сопротивления резисторов прямо пропорциональны их длине (номеру резистора в 1 и 2 пунктах задачи) и обратно пропорциональны площади их сечения (квадрату номера резистора в 3 и 4 пунктах задачи).

Правила Кирхгофа для 1 и 2 пунктов задачи имеют вид

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_5, \\ I_4 + I_5 = I_3, \\ 1 \cdot I_1 + 5 \cdot I_5 = 4 \cdot I_4, \\ 5 \cdot I_5 + 3 \cdot I_3 = 2 \cdot I_2, \end{cases}$$

откуда находим связи между силами токов:

$$I_1 = 11I_5, \qquad I_2 = 10I_5, \qquad I_3 = 5I_5, \qquad I_4 = 4I_5. \tag{4}$$

Правила Кирхгофа для 3 и 4 пунктов задачи имеют вид

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_5, \\ I_4 + I_5 = I_3, \\ \dfrac{I_1}{1^2} + \dfrac{I_5}{5^2} = \dfrac{I_4}{4^2}, \\ \dfrac{I_5}{5^2} + \dfrac{I_3}{3^2} = \dfrac{I_2}{2^2}, \end{cases}$$

откуда находим связи между силами токов:

$$I_1 = -\frac{17}{55} \cdot I_5, \qquad I_2 = -\frac{72}{55} \cdot I_5, \qquad I_3 = -\frac{909}{275} \cdot I_5, \qquad I_4 = -\frac{1184}{275} \cdot I_5. \tag{5}$$

Если измерение температур производится через малое время после замыкания цепи (пункты 1 и 3 задачи), то можно пренебречь теплопотерями и считать, что всё выделившееся количество теплоты идёт на нагревание проволоки, масса которой зависит линейно от длины $L_n$ и квадратично от диаметра $D_n$, поэтому прирост $\Delta T_n$ температуры резистора $R_n$ имеет вид

$$\Delta T_n = k_{13} \cdot \frac{I_n^2 R_n}{L_n D_n^2},$$

где $k_{13}$ — коэффициент пропорциональности. С учётом известного значения $\Delta T_5$ удобно записать этот же результат в виде

$$\frac{\Delta T_n}{\Delta T_5} = \left(\frac{I_n}{I_5}\right)^2 \cdot \frac{R_n}{R_5} \cdot \frac{L_5}{L_n} \cdot \left(\frac{D_5}{D_n}\right)^2 = \left(\frac{I_n}{I_5}\right)^2 \cdot \left(\frac{D_5}{D_n}\right)^4. \tag{6}$$



Если измерение температур производится через большое время после замыкания цепи (пункты 2 и 4 задачи), то превышение $\Delta T_n$ температуры резистора $R_n$ над окружающей средой будет определяться равенством мощностей тепловыделения и теплоотдачи, которая пропорциональна площади поверхности проволоки (длине $L_n$ и диаметру $D_n$) и $\Delta T_n$, откуда получаем выражение

$$\Delta T_n = k_{24} \cdot \frac{I_n^2 R_n}{L_n D_n},$$

где $k_{24}$ — коэффициент пропорциональности. С учётом известного значения $\Delta T_5$ удобно записать этот же результат в виде

$$\frac{\Delta T_n}{\Delta T_5} = \left(\frac{I_n}{I_5}\right)^2 \cdot \frac{R_n}{R_5} \cdot \frac{L_5}{L_n} \cdot \frac{D_5}{D_n} = \left(\frac{I_n}{I_5}\right)^2 \cdot \left(\frac{D_5}{D_n}\right)^3. \tag{7}$$

Таким образом, мы рассмотрели влияние каждого фактора по отдельности, а результаты их сведения воедино представлены в табл. 1 (пояснение расчёта) и табл. 2 (итог расчёта). Наименьшей во всех опытах оказалась температура центрального резистора, поэтому окончательные ответы имеют вид

$$\max\{\Delta T_1; \Delta T_2; \Delta T_3; \Delta T_4\} - \Delta T_5.$$

Ответы с учётом указанного в условии округления: $\{1200; 1200; 833; 496\}$.

Таблица 1

| $N$ | Формулы опыта | Относительные повышения температур | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\Delta T_1/\Delta T_5$ | $\Delta T_2/\Delta T_5$ | $\Delta T_3/\Delta T_5$ | $\Delta T_4/\Delta T_5$ |
| 1 | (4) + (6) | $11^2 \cdot 1^4$ | $10^2 \cdot 1^4$ | $5^2 \cdot 1^4$ | $4^2 \cdot 1^4$ |
| 2 | (4) + (7) | $11^2 \cdot 1^3$ | $10^2 \cdot 1^3$ | $5^2 \cdot 1^3$ | $4^2 \cdot 1^3$ |
| 3 | (5) + (6) | $\left(\frac{17}{55}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{1}\right)^4$ | $\left(\frac{72}{55}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4$ | $\left(\frac{909}{275}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^4$ | $\left(\frac{1184}{275}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4$ |
| 4 | (5) + (7) | $\left(\frac{17}{55}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{1}\right)^3$ | $\left(\frac{72}{55}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3$ | $\left(\frac{909}{275}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3$ | $\left(\frac{1184}{275}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3$ |

Таблица 2

| $N$ | Формулы опыта | Превышения, мК | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\Delta T_1$ | $\Delta T_2$ | $\Delta T_3$ | $\Delta T_4$ |
| 1 | (4) + (6) | 1210 | 1000 | 250 | 160 |
| 2 | (4) + (7) | 1210 | 1000 | 250 | 160 |
| 3 | (5) + (6) | 597 | 669 | 843 | 453 |
| 4 | (5) + (7) | 119 | 268 | 506 | 362 |

### Задача 6. Космический луч

Рассмотрим преломление луча в произвольной точке $E$ на расстоянии $R$ от центра $O$ туманности (рис. 6). Пусть $n_1$ и $n_2$ — показатели преломления соответственно снаружи и внутри сферической границы раздела вблизи неё (в случае непрерывной зависимости показателя преломления от $R$ значения $n_1$ и $n_2$ будут бесконечно близки, из-за чего луч будет отклоняться плавно, но нам этот факт даже не потребуется), тогда закон Снелла имеет вид

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2, \tag{8}$$

где $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — углы падения и преломления соответственно.

Пусть $\ell_1$ и $\ell_2$ — расстояния от центра туманности до продолжения падающего луча и до преломлённого луча соответственно, тогда из прямоугольных треугольников следуют соотношения

$$\sin\alpha_1 = \frac{\ell_1}{R} \qquad \text{и} \qquad \sin\alpha_2 = \frac{\ell_2}{R},$$

после подстановки которых в закон преломления (8) получаем инвариант

$$n_1\ell_1 = n_2\ell_2.$$

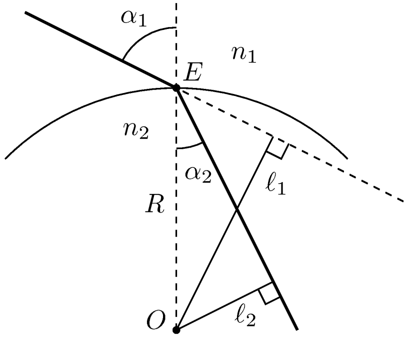


Рис. 6

Напомним, что инвариантом называется выражение, формально зависящее от нескольких переменных, но фактически сохраняющее постоянное значение при некоторых условиях. В данном случае остаётся постоянным произведение показателя преломления в некоторой точке траектории луча на расстояние от центра туманности до касательной к траектории луча в этой точке.

Применим полученный инвариант к двум точкам — вдали от туманности (в вакууме $n = 1$) и на минимальном расстоянии от её центра:

$$1 \cdot H = n_0 \cdot D, \qquad \text{откуда} \qquad n_0 = \frac{H}{D}.$$



### Задача 7. Одноразовая идеальная линза

Чтобы все падающие лучи после прохождения линзы пересеклись в одной точке $F$, у них должны быть одинаковые оптические длины путей. Введём показанную на рис. 7 систему координат $Oxy$ и запишем равенство оптической длины пути произвольного луча, преломившегося на выпуклой поверхности линзы в точке с координатами $(x; y)$, и оптической длины пути луча, прошедшего вдоль оси симметрии линзы:

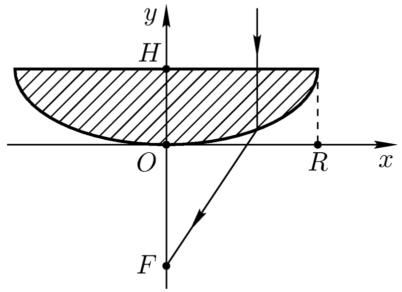


Рис. 7

$$n \cdot (H - y) + 1 \cdot \sqrt{x^2 + (y+f)^2} = n \cdot H + 1 \cdot f,$$

откуда после упрощения получаем квадратное уравнение

$$(n^2 - 1)y + 2f(n-1)y - x^2 = 0,$$

положительное (осмысленное) решение которого имеет вид

$$y = \frac{f}{n+1}\left(\sqrt{1 + \frac{(n+1)x^2}{(n-1)f^2}} - 1\right).$$

Искомая величина $H$ — это значение $y$ в точке $x = R$, из чего следует ответ:

$$H = \frac{f}{n+1}\left(\sqrt{1 + \frac{(n+1)R^2}{(n-1)f^2}} - 1\right) = 0{,}2 \text{ м}.$$

**Примечание.** Предлагаем читателям самостоятельно подумать над следующими вопросами. Как называется найденная нами математическая форма выпуклой поверхности линзы в пространстве? Почему обычно используют сферические линзы, хотя из нашего решения следует, что для идеальности линзы поверхность должна иметь не сферическую форму? Почему в тексте задачи мы намеренно не использовали термины «фокус», «фокусное расстояние» и «оптическая сила»? Подсказка содержится в названии задачи. ☺

## Старшая лига

### Задача 1. Центр масс загружаемой платформы

См. зад. 1 мл. лиги.

### Задача 2. Раскручивание резинового кольца

См. зад. 2 мл. лиги.

### Задача 3. Неоднородный цилиндр

См. зад. 3 мл. лиги.

### Задача 4. Адиабатное падение тяжёлого поршня

Пусть $m$ — масса поршня, $S$ — площадь поперечного сечения цилиндра, тогда закон сохранения энергии и уравнение адиабаты с постоянной $\gamma = 5/3$ для одноатомного газа имеют вид

$$\frac{3}{2}P_0SH_0 + mgH_0 = \frac{3}{2}P_{\max}SH_{\min} + mgH_{\min},$$

$$P_0(SH_0)^\gamma = P_{\max}(SH_{\min})^\gamma.$$

Используя введённые в условии безразмерные искомые параметры и известное значение $\varphi = P_0S/(mg)$, преобразуем эти уравнения к виду

$$\frac{3}{2}\varphi(ph-1) = 1-h, \tag{9}$$

$$p = h^{-\gamma}. \tag{10}$$

Подстановка выражения (10) и значения $\gamma$ в равенство (9) даёт нелинейное уравнение

$$\frac{3}{2}\varphi(h^{-2/3}-1) = 1-h,$$

которое можно решить приближённо, если учесть, что $h \ll 1$ при $\varphi \ll 1$, то есть последним вхождением $h$ можно пренебречь и найти первый ответ:

$$h \approx \left(\frac{3\varphi}{2+3\varphi}\right)^{3/2} \approx 1{,}8\cdot 10^{-3}.$$

С помощью уравнения (10) находим второй ответ:

$$p \approx \left(\frac{2+3\varphi}{3\varphi}\right)^{5/2} \approx 3{,}8\cdot 10^{4}.$$

Третий ответ найдём из уравнения Менделеева–Клапейрона, записав его через относительные параметры газа:

$$t = ph \approx \frac{2+3\varphi}{3\varphi} \approx 67{,}7.$$



### Задача 5. Нагрев электромоста

См. зад. 5 мл. лиги.

### Задача 6. Космический луч

См. зад. 6 мл. лиги.

### Задача 7. Одноразовая идеальная линза

См. зад. 7 мл. лиги.

### Задача 8. Проволочный куб

Обозначим через $M$ взаимную индуктивность двух проволочных контуров, расположенных вдоль рёбер двух смежных граней куба, а черех $m$ — взаимную индуктивность двух проволочных контуров, расположенных вдоль рёбер двух противоположных граней куба.

**Примечание.** Взаимная индуктивность — это коэффициент пропорциональности между магнитным потоком в одном контуре и силой тока в другом.

Есть пустить ток по четырём рёбрам одной грани куба, то магнитный поток, входящий в куб через эту грань, будет равен суммарному магнитному потоку, выходящему из куба через четыре смежные грани и одну противоположную, откуда получаем первое соотношение между индуктивностями:

$$L_{41} = 4M + m. \tag{11}$$

Есть пустить ток по шести рёбрам двух смежных граней куба, то магнитный поток, входящий в куб через этот контур, будет равен суммарному магнитному потоку, выходящему из куба через четыре оставшиеся грани, две из которых являются смежными с каждой из двух граней, образующих контур, а каждая из двух других является смежной с одной из граней, образующих контур, и противоположной другой, откуда получаем второе соотношение между индуктивностями:

$$L_{62} = 2(M+M) + 2(M+m) = 6M + 2m. \tag{12}$$

**Примечание.** Можно получить то же самое соотношение (12) по-другому: мысленно добавим два противоположно направленных тока той же самой силой $I$ вдоль общего ребра двух граней, образующих рассматриваемый контур, тогда его можно разбить на два контура, каждый из которых добавляет магнитный поток $L_{41}I$ через себя и вычитает магнитный поток $MI$ через второй контур, из чего можно записать равенство

$$L_{62} = 2(L_{41} - 2M) = 6M + 2m,$$

которое совпадает с соотношением (12) после подстановки выражения (11).

Решая уравнения (11) и (12) совместно, находим взаимные индуктивности:

$$M = L_{41} - \frac{L_{62}}{2}, \qquad m = 2L_{62} - 3L_{41}. \tag{13}$$

Выразим каждую из искомых индуктивностей $L_{63}$ и $L_{83}$ обоими показанными выше способами (запасной способ — ради интереса и для самопроверки):

$$L_{63} = 3(2M + m) = 6M + 3m,$$

$$L_{63} = 3(L_{41} - 2M) = 6M + 3m,$$

$$L_{83} = 2 \cdot 3M + (2M + m) = 8M + m,$$

$$L_{83} = 3L_{41} - 2M - 2(M + m) = 8M + m.$$

После подстановки соотношений (13) получаем первые два ответа:

$$L_{63} = 6M + 3m = 3L_{62} - 3L_{41},$$

$$L_{83} = 8M + m = 5L_{41} - 2L_{62}.$$

В третьем пункте задачи выразим магнитный поток через второй контур

$$\Phi = mI(t) = mI_0 \cos\omega t$$

и найдём показания вольтметра через ЭДС индукции:

$$U(t) = \mathscr{E} = -\dot{\Phi} = \omega m I_0 \sin\omega t = \omega(2L_{62} - 3L_{41})I_0 \sin\omega t.$$



# Junior league

## Problem 1. Mass center of loading platform

The platform of mass $M = 2000$ kg and length $L = 80$ m moves without friction with initial speed $v_0 = 1$ m/s. When the platform had already passed the loading hatch by $3/4$ of its length, it opened and crashed stone began falling of it with a flow rate of $\mu = 100$ kg/s. After hatch opening, find the velocity $v_c(t)$ of its mass center (time dependence) for the system with the platform and falling crushed stone. Give the answer in general form and for the indicated numerical data.

## Problem 2. Unrolling the rubber ring

Thin rubber ring with density $\rho = 1500$ kg/m$^3$ was placed on a rough cylinder of a slightly larger diameter, so that the ring was stretched and the mechanical stress $T = 6$ kPa appeared in it. To what maximum linear speed $v$ can the ring be spun by rotating the cylinder around its axis? Other bodies do not interact with the ring.

## Problem 3. Inhomogeneous cylinder

An inhomogeneous cylinder of radius $R$ was initially resting on a horizontal plane, touching it along its generatrix, near the position of unstable equilibrium. The maximum speed of the cylinder axis during its subsequent movement was $v_0$. Find the dependence of the speed $v$ of the cylinder axis on its horizontal displacement $x$, as well as the maximum acceleration $a_0$ of the cylinder axis. There is no slippage or rolling friction.

## Problem 4. Heating by balls

Water with total heat capacity $C_1$ is in the calorimeter at temperature $T_0 = 20°$C. There are some number of identical balls with temperature $T = 80°$C and total heat capacity $C_2 = 0.1C_1$. One ball is placed in the water, the thermodynamic equilibrium is established, and the ball is taken out, after which the process is repeated with another similar ball. When placing which ball in number will the water temperature cross $X = 50°$C? Heat capacity of the calorimeter and heat losses should not be taken into account.

### Problem 5. Heating of the electric bridge

From different pieces of nichrome wire, covered with the same insulation of the same thickness, five resistors were made, connected them in a bridge circuit (fig. 8) and connected them to a constant voltage source. In each of the four experiments described below, find the difference between the maximum and minimum temperatures of the resistors, if the temperature of the central resistor at the same time moment was higher than the room temperature by $\Delta T_5 = 10$ mK. As an answer, indicate numerical values rounded up to a whole number of millikelvins.

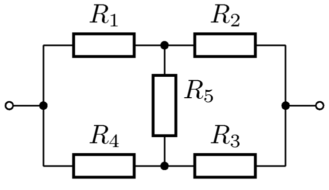


Fig. 8

1. Diameters of all pieces of wire are the same, and lengths are proportional to resistor numbers. All temperatures are measured in small time after the circuit is closed.
2. Diameters of all pieces of wire are the same, and lengths are proportional to resistor numbers. All temperatures are measured after long time after the circuit is closed.
3. Lengths of all pieces of wire are the same, and diameters are proportional to resistor numbers. All temperatures are measured in small time after the circuit is closed.
4. Lengths of all pieces of wire are the same, and diameters are proportional to resistor numbers. All temperatures are measured after long time after the circuit is closed.

### Problem 6. Cosmic Ray

Light beam from a distant star passes through the gas-dust nebula whose refractive index is a function only of the distance to the center of nebula. If there were no refraction, then the ray would pass at a distance $H$ from the center of nebula, but because of refraction, it passed at the minimum distance $D$ from this center. Find the refraction index $n_0$ at closest point on the path of the light beam to the center of nebula.

### Problem 7. A disposable ideal lens

On the flat surface of a plano-convex lens made of glass with a refractive index $n = 1.5$ and placed in air, a parallel beam of rays falls along the normal. Determine the shape of the convex surface of the lens, if the flat one has the shape of the disc with radius $R = 0.5$ m, and all the rays refracted by the lens have passed through one point $F$ located at distance $f = 1$ m from the point $O$ of the lens closest to it. As an answer, indicate the thickness $H$ of the lens (the maximum distance from a point on a convex surface to a flat surface).



## Senior league

### Problem 1. Mass center of loading platform

The platform of mass $M = 2000$ kg and length $L = 80$ m moves without friction with initial speed $v_0 = 1$ m/s. When the platform had already passed the loading hatch by $3/4$ of its length, it opened and crashed stone began falling of it with a flow rate of $\mu = 100$ kg/s. After hatch opening, find the velocity $v_c(t)$ of its mass center (time dependence) for the system with the platform and falling crushed stone. Give the answer in general form and for the indicated numerical data.

### Problem 2. Unrolling the rubber ring

Thin rubber ring with density $\rho = 1500$ kg/m$^3$ was placed on a rough cylinder of a slightly larger diameter, so that the ring was stretched and the mechanical stress $T = 6$ kPa appeared in it. To what maximum linear speed $v$ can the ring be spun by rotating the cylinder around its axis? Other bodies do not interact with the ring.

### Problem 3. Inhomogeneous cylinder

An inhomogeneous cylinder of radius $R$ was initially resting on a horizontal plane, touching it along its generatrix, near the position of unstable equilibrium. The maximum speed of the cylinder axis during its subsequent movement was $v_0$. Find the dependence of the speed $v$ of the cylinder axis on its horizontal displacement $x$, as well as the maximum acceleration $a_0$ of the cylinder axis. There is no slippage or rolling friction.

### Problem 4. Adiabatic fall of a heavy piston

A heavy piston begins an adiabatic fall in a vertical cylinder filled with a monatomic ideal gas (vacuum above the piston). The ratio of the initial force of gas pressure on the piston to the gravity of the piston is a small value $\varphi = 0.01$.

1. Estimate the ratio $h = H_{\min}/H_0$ of the minimum height $H_{\min}$ of the piston above the vessel bottom to the initial height $H_0$.
2. Estimate the ratio $p = P_{\max}/P_0$ of the maximum gas pressure $P_{\max}$ in the cylinder to the initial $P_0$.
3. Estimate the ratio $t = T_{\max}/T_0$ of the maximum gas temperature $T_{\max}$ in the cylinder to the initial $T_0$.

### Problem 5. Heating of the electric bridge

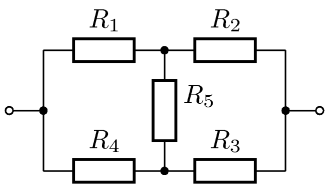


Fig. 9

From different pieces of nichrome wire, covered with the same insulation of the same thickness, five resistors were made, connected them in a bridge circuit (fig. 9) and connected them to a constant voltage source. In each of the four experiments described below, find the difference between the maximum and minimum temperatures of the resistors, if the temperature of the central resistor at the same time moment was higher than the room temperature by $\Delta T_5 = 10$ mK. As an answer, indicate numerical values rounded up to a whole number of millikelvins.

1. Diameters of all pieces of wire are the same, and lengths are proportional to resistor numbers. All temperatures are measured in small time after the circuit is closed.
2. Diameters of all pieces of wire are the same, and lengths are proportional to resistor numbers. All temperatures are measured after long time after the circuit is closed.
3. Lengths of all pieces of wire are the same, and diameters are proportional to resistor numbers. All temperatures are measured in small time after the circuit is closed.
4. Lengths of all pieces of wire are the same, and diameters are proportional to resistor numbers. All temperatures are measured after long time after the circuit is closed.

### Problem 6. Cosmic Ray

Light beam from a distant star passes through the gas-dust nebula whose refractive index is a function only of the distance to the center of nebula. If there were no refraction, then the ray would pass at a distance $H$ from the center of nebula, but because of refraction, it passed at the minimum distance $D$ from this center. Find the refraction index $n_0$ at closest point on the path of the light beam to the center of nebula.

### Problem 7. A disposable ideal lens

On the flat surface of a plano-convex lens made of glass with a refractive index $n = 1.5$ and placed in air, a parallel beam of rays falls along the normal. Determine the shape of the convex surface of the lens, if the flat one has the shape of the disc with radius $R = 0.5$ m, and all the rays refracted by the lens have passed through one point $F$ located at distance $f = 1$ m from the point $O$ of the lens closest to it. As an answer, indicate the thickness $H$ of the lens (the maximum distance from a point on a convex surface to a flat surface).



### Problem 8. Wire Cube

Thin wire is laid along the edges of the cube in various ways and current is passed through it. The inductance of closed circuit with four edges belonging to one face is equal to $L_{41}$. The inductance of a closed-circuit with six edges belonging to two adjacent faces is equal to $L_{62}$.

1. Find the inductance $L_{63}$ of a closed-circuit with six edges belonging to three pairwise adjacent faces.
2. Find the inductance $L_{83}$ of a closed-circuit with eight edges belonging to three faces, two of which are parallel to each other, and the third is adjacent to each of the other two.
3. Two closed wires are laid along the edges of two opposite faces. An alternating current with a power $I(t) = I_0 \cos\omega t$ flows through one wire circuit. An ideal small voltmeter is inserted into the other wire loop. Find the time dependence $U(t)$ of the voltmeter.

# Possible solutions

## Junior league

### Problem 1. Mass center of loading platform

The horizontal components of all external forces acting on the system are equal to zero. The interaction between platform and falling crushed stone is internal to the considered system. So it cannot affect the coordinate $x_c$ of the system's center of mass. Hence, $x_c(t)$ dependence can be found in the absence of this interaction, assuming that the crushed stone falls to the ground, and the platform moves with constant speed:

$$x_c(t) = \frac{M \cdot (L/4 + v_0 t) + \mu t \cdot 0}{M + \mu t} = \frac{L}{4} \cdot \frac{1 + 4v_0 t/L}{1 + \mu t/M} = 20 \text{ m}.$$

Note that when substituting the values into the general formula, time $t$ was reduced due to the completion of the relation between numerical data: $\mu L = 4Mv_0$. In that case, the platform with crushed stone will move, and the center of mass will be at rest. In general case, we find the desired speed through the coordinate derivative:

$$v_c(t) = \dot{x}_c(t) = v_0 \cdot \frac{1 - \dfrac{\mu L}{4Mv_0}}{\left(1 + \dfrac{\mu t}{M}\right)^2}.$$

### Problem 2. Unrolling the rubber ring

By rotating the cylinder, it is possible to accelerate the ring in the presence of a non-zero friction force, which requires a non-zero force $N$ of the normal reaction of the cylinder acting on a small arc $2\alpha$ of the rubber ring (fig. 10). Let $R$ be the radius of the cylinder, $S$ — the cross-sectional area of the rubber band forming the ring. Then the Newton's second law for the arc under consideration, having the mass $m = \rho \cdot S \cdot 2\alpha R$, in projection onto direction of centripetal acceleration takes the form

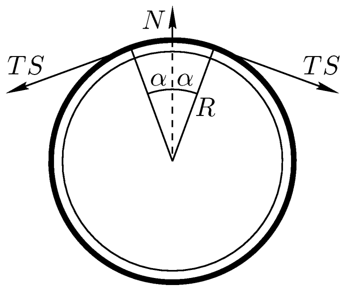


Fig. 10

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = 2 \cdot TS \cdot \sin\alpha - N \approx 2TS\alpha - N.$$

The maximum speed is reached at $N = 0$, from which, after substitution for $m$, we get the answer:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 2 \text{ m/s}.$$



**Note.** We invite readers to think about the possible reasons for the similarity of the obtained result with the formula for the sound wave velocity.

### Problem 3. Inhomogeneous cylinder

1. There is no movement along the axis of the cylinder and no forces act, so it reduce the problem to a plane one. Let us place the origin of the $Oxy$ (fig. 11) coordinate system at any point in the straight line along which the cylinder and the plane touched at the initial moment. If the center of mass of the cylinder were on its axis, then the equilibrium position would be indifferent and not unstable. This means that the center of mass is located at some distance $r_c > 0$ from the axis of the cylinder, and at the initial moment, it was located above the axis.

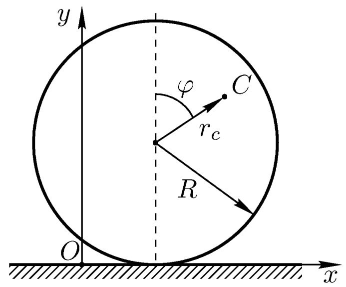


Fig. 11

2. To calculate the kinetic energy of a cylinder, let's mentally divide it into many small pieces, numbered with the letter $i$:

$$E = \sum_i \frac{m_i}{2} \left( (v_{cx} + v_{ix})^2 + (v_{cy} + v_{iy})^2 \right), \tag{14}$$

where $v_{cx}$ and $v_{cy}$ — are the corresponding velocity projections of the center of mass, $v_{ix}$ and $v_{iy}$ — velocities projections of the corresponding pieces with masses $m_i$ in the center-of-mass system. Let's expand the brackets in the formula (14):

$$E = \sum_i \frac{m_i}{2} (v_c^2 + v_i^2 + 2v_{cx}v_{ix} + 2v_{cx}v_{ix}), \tag{15}$$

where the relations $v_c^2 = v_{cx}^2 + v_{cy}^2$ and $v_i^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2$ are used. In the center of mass system, the total momentum is zero:

$$p_x = \sum_i m_i v_{ix} = 0, \qquad p_y = \sum_i m_i v_{iy} = 0.$$

Considering these relations, we transform the expression (15):

$$E = \sum_i \frac{m_i}{2} (v_c^2 + v_i^2). \tag{16}$$

One could immediately write this relation by referring to Koenig's theorem. In the center of mass system, the cylinder rotates around its axis, hence, $v_i = \omega r_i$, where $\omega$ — angular velocity, $r_i$ — distance from the corresponding piece to the axis. The cylinder does not slip, so $\omega = v/R$. Substitute the formulas $v_i = vr_i/R$ и $v_c = vr_c/R$ into the expression (16):

$$E = \sum_i \frac{m_i}{2} \left( \left(\frac{vr_c}{R}\right)^2 + \left(\frac{vr_i}{R}\right)^2 \right) = Av^2,$$

where $A$ — constant depending only on the mass distribution of the cylinder.

3. Let $\varphi$ be the angle between the direction to the center of mass and the vertical (fig. 11). In an arbitrary position, due to the absence of slip, the relation $\varphi = x/R$ can be written (up to an unimportant multiple of $2\pi$). From the energy conservation law

$$E + W = Av^2 + Mgr\cos\varphi = 0 + Mgr = \text{const}$$

let's express the speed:

$$|v| = \sqrt{\frac{Mgr}{A}(1-\cos\varphi)} = \sqrt{\frac{2Mgr}{A}}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| = v_0\left|\sin\left(\frac{x}{2R}\right)\right|.$$

The axis of the cylinder will oscillate so that $x \in [0; 2\pi R]$. In different half-cycles, the speed will have a different sign for the same $x$, that is, the dependence $v(x)$ is ambiguous:

$$v = \pm v_0 \sin\left(\frac{x}{2R}\right), \qquad x \in [0; 2\pi R].$$

4. The sign of the speed does not affect the value of the maximum acceleration, therefore, for certainty, we choose «+» and express the acceleration::

$$a(x) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v_0\frac{\sin(\frac{x+\Delta x}{2R}) - \sin(\frac{x}{2R})}{\Delta t} = v_0\frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{4R}\right)\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{4R}\right)}{\Delta t} \approx$$

$$\approx \frac{v_0\Delta x}{2R\Delta t}\cos\left(\frac{x}{2R}\right) = \frac{v_0^2}{2R}\sin\left(\frac{x}{2R}\right)\cos\left(\frac{x}{2R}\right) = \frac{v_0^2}{4R}\sin\left(\frac{x}{R}\right).$$

Hence, we find the maximum acceleration $a_0 = v_0^2/(4R)$.



**Problem 4. Heating by balls**

From the heat balance equation when the first ball is placed

$$C_1(T_1 - T_0) = C_2(T - T_1)$$

find the new equilibrium temperature:

$$T_1 = \frac{C_1T_0 + C_2T}{C_1 + C_2}.$$

This expression has the expected form of the weighted average (we come across this form in a variety of situations, for example, similarly, bodies velocity after an absolutely inelastic impact is found, coordinate of the center of mass of the system, average density, etc.). (adding each ball brings the water temperature closer to $T$).

Let $T_n$ be the equilibrium temperature after placing the $n$-th ball (note that the $T_0$ notation introduced in the problem statement fits perfectly into this system), $\Delta T_n = T - T_n$ — difference between equilibrium temperature and limiting temperature, then the heat balance equation can be rewritten in the form

$$C_1(\Delta T_{n-1} - \Delta T_n) = C_2(\Delta T_n - 0),$$

from where we find the recurrence relation

$$\Delta T_n = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\cdot \Delta T_{n-1},$$

i.e. the sequence $\Delta T_n$ forms a geometric progression:

$$\Delta T_n = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^n \cdot \Delta T_0.$$

The desired number of the ball — is the smallest integer value $n$, under which the condition is satisfied

$$\left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^n \cdot (T - T_0) < T - T_x,$$

which is equivalent to the inequality

$$n > \frac{\ln\left(\dfrac{T - T_0}{T - T_x}\right)}{\ln\left(1 + \dfrac{C_2}{C_1}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}1} \approx 7{,}3.$$

So the final answer is: $n = 8$.

**Problem 5. Heating of the electric bridge**

Denote by $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$ and $I_5$ the currents flowing through the corresponding resistors, and we will assume that the directions indicated by arrows (fig. 12) on the diagram are positive.

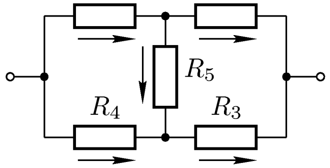



Fig. 12

It follows from the formula for resistivity that the resistances of resistors are directly proportional to their length (the number of the resistor in 1 and 2 points of the problem) and are inversely proportional to their cross-sectional area (to the square of the resistor number at 3 and 4 points of the problem).

Kirchhoff's rules for 1 and 2 points of the problem have the form

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_5, \\ I_4 + I_5 = I_3, \\ 1 \cdot I_1 + 5 \cdot I_5 = 4 \cdot I_4, \\ 5 \cdot I_5 + 3 \cdot I_3 = 2 \cdot I_2, \end{cases}$$

where we find the relationship between the forces of the currents:

$$I_1 = 11I_5, \qquad I_2 = 10I_5, \qquad I_3 = 5I_5, \qquad I_4 = 4I_5. \tag{17}$$

Kirchhoff's rules for 3 and 4 points of the problem have the form

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_5, \\ I_4 + I_5 = I_3, \\ \dfrac{I_1}{1^2} + \dfrac{I_5}{5^2} = \dfrac{I_4}{4^2}, \\ \dfrac{I_5}{5^2} + \dfrac{I_3}{3^2} = \dfrac{I_2}{2^2}, \end{cases}$$

where we find the relationship between the forces of the currents:

$$I_1 = -\frac{17}{55} \cdot I_5, \qquad I_2 = -\frac{72}{55} \cdot I_5, \qquad I_3 = -\frac{909}{275} \cdot I_5, \qquad I_4 = -\frac{1184}{275} \cdot I_5. \tag{18}$$

If the temperature measurement is made after a short time after the circuit is closed (points 1 and 3 of the task), then we can neglect the heat losses and assume that the entire amount of heat released is used to heat the wire, whose mass depends linearly on the length $L_n$ and quadratically on the diameter $D_n$, therefore, the temperature increase $\Delta T_n$ of the resistor $R_n$ has the form

$$\Delta T_n = k_{13} \cdot \frac{I_n^2 R_n}{L_n D_n^2},$$

where $k_{13}$ — coefficient of proportionality. Taking into account the known value $\Delta T_5$, it is convenient to write the same result in the form

$$\frac{\Delta T_n}{\Delta T_5} = \left(\frac{I_n}{I_5}\right)^2 \cdot \frac{R_n}{R_5} \cdot \frac{L_5}{L_n} \cdot \left(\frac{D_5}{D_n}\right)^2 = \left(\frac{I_n}{I_5}\right)^2 \cdot \left(\frac{D_5}{D_n}\right)^4. \tag{19}$$



If the temperature measurement is performed after a long time after the circuit is closed (paragraphs 2 and 4 of the task), then the $\Delta T_n$ excess of the $R_n$ resistor temperature above the environment will be determined by the equality of the heat release and heat transfer powers, which is proportional to the surface area of the wire (length $L_n$ and diameter $D_n$) and $\Delta T_n$, whence we get the expression

$$\Delta T_n = k_{24} \cdot \frac{I_n^2 R_n}{L_n D_n},$$

where $k_{24}$ — proportionality coefficient. Considering the known value $\Delta T_5$, it is convenient to write the same result in the form

$$\frac{\Delta T_n}{\Delta T_5} = \left(\frac{I_n}{I_5}\right)^2 \cdot \frac{R_n}{R_5} \cdot \frac{L_5}{L_n} \cdot \frac{D_5}{D_n} = \left(\frac{I_n}{I_5}\right)^2 \cdot \left(\frac{D_5}{D_n}\right)^3. \tag{20}$$

Thus, we considered the influence of each factor separately, and the results of their combination are presented in table 3 (calculation explanation) and table 4 (calculation summary). The temperature of the central resistor turned out to be the lowest in all the experiments, so the final answers have the form

$$\max\{\Delta T_1; \Delta T_2; \Delta T_3; \Delta T_4\} - \Delta T_5.$$

Answers taking into account the rounding specified in the condition: $\{1200; 1200; 833; 496\}$.

Table 3

| $N$ | Experiment formulas | Relative temperature exceeding | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\Delta T_1/\Delta T_5$ | $\Delta T_2/\Delta T_5$ | $\Delta T_3/\Delta T_5$ | $\Delta T_4/\Delta T_5$ |
| 1 | (17) + (19) | $11^2 \cdot 1^4$ | $10^2 \cdot 1^4$ | $5^2 \cdot 1^4$ | $4^2 \cdot 1^4$ |
| 2 | (17) + (20) | $11^2 \cdot 1^3$ | $10^2 \cdot 1^3$ | $5^2 \cdot 1^3$ | $4^2 \cdot 1^3$ |
| 3 | (18) + (19) | $\left(\frac{17}{55}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{1}\right)^4$ | $\left(\frac{72}{55}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4$ | $\left(\frac{909}{275}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^4$ | $\left(\frac{1184}{275}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4$ |
| 4 | (18) + (20) | $\left(\frac{17}{55}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{1}\right)^3$ | $\left(\frac{72}{55}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3$ | $\left(\frac{909}{275}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3$ | $\left(\frac{1184}{275}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3$ |

Table 4

| $N$ | Experiment formulas | Exceeding, mK | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\Delta T_1$ | $\Delta T_2$ | $\Delta T_3$ | $\Delta T_4$ |
| 1 | (17) + (19) | 1210 | 1000 | 250 | 160 |
| 2 | (17) + (20) | 1210 | 1000 | 250 | 160 |
| 3 | (18) + (19) | 597 | 669 | 843 | 453 |
| 4 | (18) + (20) | 119 | 268 | 506 | 362 |

### Problem 6. Cosmic Ray

Consider the ray's refraction at an arbitrary point $E$ at distance $R$ from the center $O$ of the nebula (fig. 13). Let $n_1$ and $n_2$ be the refractive indices outside and inside the spherical interface near it, respectively (in case of continuous dependence of the refractive index on $R$, the values $n_1$ and $n_2$ will be infinitely close, because of which the beam will deviate smoothly, but we don't even need this fact), then Snell's law is

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2, \tag{21}$$

where $\alpha_1$ and $\alpha_2$ — are the angles of incidence and refraction, respectively.

Let $\ell_1$ and $\ell_2$ be the distances from the center of the nebula to the continuation of the incident ray and to the refracted ray, respectively,

then, from the right triangles, the next relations follow

$$\sin\alpha_1 = \frac{\ell_1}{R} \qquad \text{and} \qquad \sin\alpha_2 = \frac{\ell_2}{R},$$

after substituting them into the law of refraction (21) we get the invariant

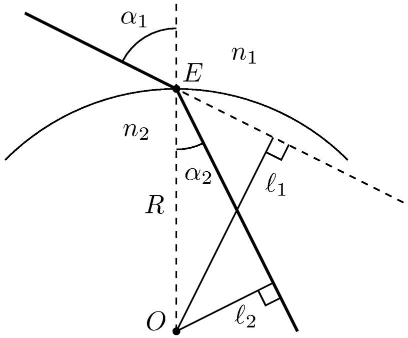


Fig. 13

$$n_1\ell_1 = n_2\ell_2.$$

Recall that an invariant formally depends on several variables, but actually retains a constant value under certain conditions. In that case, the product of the refractive index at some ray's trajectory point by the distance from the nebula's center to the tangent to the ray trajectory at this point remains constant.

Let us apply the resulting invariant to two points — far from the nebula (in a vacuum $n = 1$) and at the minimum distance from its center:

$$1 \cdot H = n_0 \cdot D, \qquad \text{from where} \qquad n_0 = \frac{H}{D}.$$



### Problem 7. A disposable ideal lens

In order for all incident rays to intersect at one point $F$ after passing through the lens, they must have the same optical path lengths. Let us introduce the coordinate system $Oxy$ shown on fig. 14 and write the equality of the optical path length of an arbitrary ray refracted on the convex surface of the lens at the point with coordinates $(x; y)$ and the ray's optical path length passing along the axis lens symmetry:

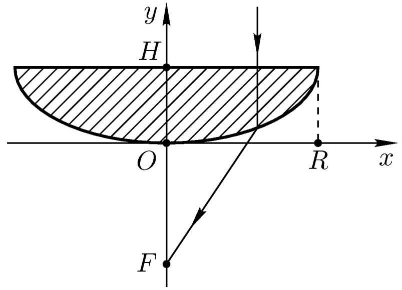


Fig. 14

$$n \cdot (H - y) + 1 \cdot \sqrt{x^2 + (y+f)^2} = n \cdot H + 1 \cdot f,$$

whence, after simplification, we get the quadratic equation

$$(n^2 - 1)y + 2f(n-1)y - x^2 = 0,$$

positive (meaningful) solution of which has the form

$$y = \frac{f}{n+1}\left(\sqrt{1 + \frac{(n+1)x^2}{(n-1)f^2}} - 1\right).$$

The desired value $H$ — is the value $y$ at the point $x = R$, from which the answer follows:

$$H = \frac{f}{n+1}\left(\sqrt{1 + \frac{(n+1)R^2}{(n-1)f^2}} - 1\right) = 0{,}2\ m.$$

**Note.** We invite readers to think for themselves about the following questions. What is the name of the mathematical form of the convex surface of a lens found by us in space? Why are spherical lenses commonly used when our solution implies that the surface must be non-spherical in order for the lens to be ideal? Why didn't we deliberately use the terms «focus», «focal length» and «optical power» in the text of the problem? It contained the hint in the task name. ☺

## Senior league

### Problem 1. Mass center of loading platform

См. зад. 1 мл. лиги.

### Problem 2. Unrolling the rubber ring

См. зад. 2 мл. лиги.

### Problem 3. Inhomogeneous cylinder

См. зад. 3 мл. лиги.

### Problem 4. Adiabatic fall of a heavy piston

Let $m$ be the mass of the piston, $S$ — the cross-sectional area of the cylinder. Then the energy conservation law and the adiabatic equation with constant $\gamma = 5/3$ for a monatomic gas have the form:

$$\frac{3}{2}P_0SH_0 + mgH_0 = \frac{3}{2}P_{\max}SH_{\min} + mgH_{\min},$$

$$P_0(SH_0)^\gamma = P_{\max}(SH_{\min})^\gamma.$$

Using the dimensionless desired parameters introduced in the condition and the known value $\varphi = P_0S/(mg)$, we transform these equations to the form

$$\frac{3}{2}\varphi(ph-1) = 1-h, \tag{22}$$

$$p = h^{-\gamma}. \tag{23}$$

Substituting the expressions (23) and the values of $\gamma$ into the equality (22) we get following nonlinear equation

$$\frac{3}{2}\varphi(h^{-2/3}-1) = 1-h,$$

which can be solved approximately considering that $h \ll 1$ for $\varphi \ll 1$, that is the last occurrence $h$ can be neglected and we can find the first answer:

$$h \approx \left(\frac{3\varphi}{2+3\varphi}\right)^{3/2} \approx 1{,}8\cdot 10^{-3}.$$

Using the equation (23), we find the second answer:

$$p \approx \left(\frac{2+3\varphi}{3\varphi}\right)^{5/2} \approx 3{,}8\cdot 10^{4}.$$



We find the third answer from the Mendeleev-Clapeyron equation, writing it in terms of the relative parameters of the gas:

$$t = ph \approx \frac{2+3\varphi}{3\varphi} \approx 67{,}7.$$

### Problem 5. Heating of the electric bridge

См. зад. 5 мл. лиги.

### Problem 6. Cosmic Ray

См. зад. 6 мл. лиги.

### Problem 7. A disposable ideal lens

См. зад. 7 мл. лиги.

### Problem 8. Wire Cube

We denote through $M$ the mutual inductance of two wire contours located along the edges of two adjacent faces of the cube, and through $m$ the mutual inductance of two wire contours located along the edges of two opposite faces of the cube.

**Note.** Mutual inductance is the coefficient of proportionality between the magnetic flux in one circuit and the current strength in the other.

There is a current on four edges of one face of the cube, then the magnetic flux entering the cube through this face will be equal to the total magnetic flux exiting the cube through four adjacent faces and one opposite, where we get the first relationship between inductances:

$$L_{41} = 4M + m. \tag{24}$$

If the current is passed along six edges of two adjacent faces of the cube, then the magnetic flux entering the cube through this circuit will be equal to the total magnetic flux. The magnetic flux exits the cube through the four remaining faces, two of which are adjacent to each of the two faces that form the contour, and each of the other two is adjacent to one of the faces that form the contour, and opposite to the other, from where we get the second relation between the inductances:

$$L_{62} = 2(M+M) + 2(M+m) = 6M + 2m. \tag{25}$$

**Note.** It is possible to get the same (25) in other way: let us add two oppositely directed currents with the same force $I$ along the common edge of two faces that form the considered contour. Then it can be divided into two circuits, each of which adds the magnetic flux $L_{41}I$ through itself and subtracts the magnetic flux $MI$ through the second circuit. From here, we can write the equality

$$L_{62} = 2(L_{41} - 2M) = 6M + 2m,$$

which matches (25) after substitution of (24).

Solving the equations (24) and (25) together, we find the mutual inductances:

$$M = L_{41} - \frac{L_{62}}{2}, \qquad m = 2L_{62} - 3L_{41}. \tag{26}$$

Let's express each of the desired inductances $L_{63}$ and $L_{83}$ in both ways shown above (the fallback method — for the sake of interest and for self-testing):

$$L_{63} = 3(2M + m) = 6M + 3m,$$

$$L_{63} = 3(L_{41} - 2M) = 6M + 3m,$$

$$L_{83} = 2 \cdot 3M + (2M + m) = 8M + m,$$

$$L_{83} = 3L_{41} - 2M - 2(M + m) = 8M + m.$$

After substituting the (26) relations, we get the first two answers:

$$L_{63} = 6M + 3m = 3L_{62} - 3L_{41},$$

$$L_{83} = 8M + m = 5L_{41} - 2L_{62}.$$

In the third paragraph of the problem, we express the magnetic flux through the second circuit

$$\Phi = mI(t) = mI_0 \cos\omega t$$

and find the readings of the voltmeter through the induction EMF:

$$U(t) = \mathscr{E} = -\dot{\Phi} = \omega m I_0 \sin\omega t = \omega(2L_{62} - 3L_{41}) I_0 \sin\omega t.$$