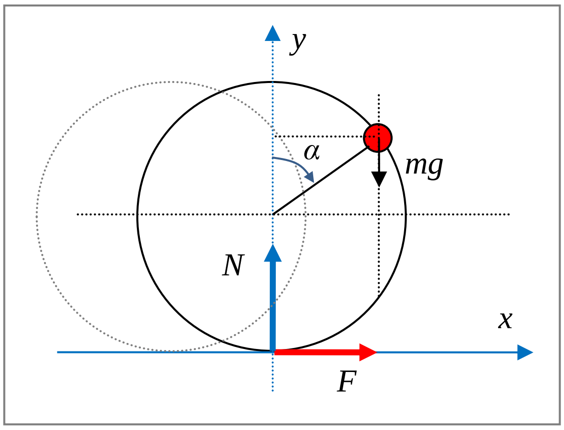
## Решение задачи №3 (неоднородный цилиндр), старшая лига




Задачу можно решить в расширенном варианте: определять составляющие реакции плоскости, их зависимости от угла или времени. Но, обойдёмся только скоростью и ускорением оси. Делаем рисунок и вводим систему координат. Систему моделируем безмассовым обручем, на котором закреплена материальная точка массой $m$ и моментом инерции $J$ (не обращаем внимание на противоречие «материальная точка и момент инерции») Задачу решаем в рамках абсолютно твердого тела, деформация отсутствует.

Уравнения связи

$$\begin{cases} x = R\cdot\alpha \\ x_0 = R\big(\alpha + sin(\alpha)\big) \\ y_0 = R\big(1 + cos(\alpha)\big) \end{cases}$$

Скорости и ускорения (из уравнений связи)

$$\begin{cases} \dot{x} = R\cdot\dot{\alpha} \\ \dot{x}_0 = R\big(1 + sin(\alpha)\big)\cdot\dot{\alpha} \\ \dot{y}_0 = -R\cdot sin(\alpha)\cdot\dot{\alpha} \end{cases}$$

Здесь $x$ - координата центра колеса, $x_0$, $y_0$ - координаты центра шарика.

Закон сохранения энергии при повороте на некоторый угол $\alpha$

$$mgR\cdot\big(1 - cos(\alpha)\big) = \frac{mR^2}{2}\left[\big(1 + cos(\alpha)\big)^2 + sin(\alpha)^2 + \frac{J}{mR^2}\right]\cdot\dot{\alpha}^2$$

Шарик движется по двум направлениям и вращается.

Вводим единичные параметры: $l_0 = R;\ a_0 = g;\ t_0 = \sqrt{R/g}$

Энергетическое уравнение в безразмерных переменных

$$2\cdot\big(1 - cos(\alpha)\big) = \big[2\big(1 + cos(\alpha)\big) + j\big]\cdot\dot{\alpha}^2$$

Где $j = \frac{J}{mR^2}$. Отсюда квадрат угловой скорости

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{2\cdot\big(1 - cos(\alpha)\big)}{2\big(1 + cos(\alpha)\big) + j}$$

Очевидно, что максимум угловой скорости (и соответственно максимум скорости оси цилиндра) при $\alpha = \pi$

$$\dot{\alpha}^2{}_{max} = \frac{4}{j}$$

Если мы используем значение максимальной скорости оси цилиндра, то

$$\dot{\alpha}^2{}_{max} = \frac{4}{j} = \frac{v^2}{Rg} \quad\rightarrow\quad j = 4\frac{Rg}{v^2}$$

Скорость оси цилиндра как функция координаты

$$\dot{x} = \sqrt{gR}\sqrt{\frac{2\cdot\big(1 - cos(x/R)\big)}{2\big(1 + cos(x/R)\big) + j}}$$

Производная квадрата угловой скорости приводит к формуле углового ускорения

$$\ddot{\alpha} = (4+j)\frac{sin(\alpha)}{\left(2\left(1+cos(\alpha)\right)+j\right)^2}$$

Для определения максимума этой функции упростим её заменой $j = 2(\beta - 1)$. После преобразования

$$\ddot{\alpha} = \frac{(1+\beta)}{2}\frac{sin(\alpha)}{\left(\beta+cos(\alpha)\right)^2}$$

Будем искать максимум квадрата функции

$$f(x) = \frac{1-x^2}{(\beta+x)^4}$$

Где $x = cos(\alpha)$. Метод производной приводит к уравнению

$$x^2 - \beta x - 2 = 0$$

Его общее решение

$$x = cos(\alpha) = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2+8}}{2}$$

Выбираем отрицательный корень (угол должен быть больше π/2)

$$x = cos(\alpha)_{max} = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2+8}}{2}$$

Эта величина и определяет максимальное значение углового ускорения и соответственно максимум ускорения оси цилиндра. Формула ускорения оси цилиндра в размерном виде

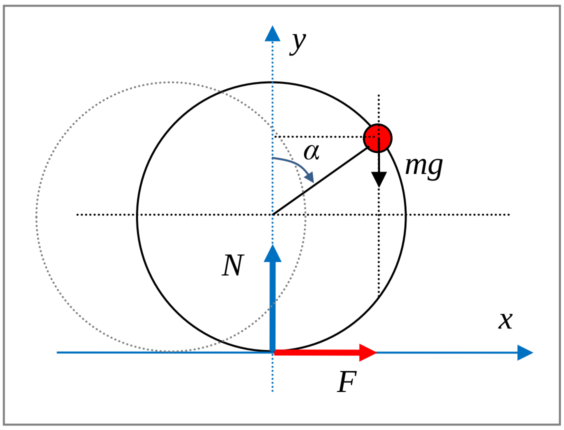
$$\ddot{x} = (4+j)\frac{sin(\alpha)}{\left(2\left(1+cos(\alpha)\right)+j\right)^2}\cdot g$$

**Задача 3. Неоднородный цилиндр**

| № | Критерии | Баллы |
|---|---|---|
| 1 | Написано общая формула кинетической энергии цилиндра (3), либо аналогичная формула (теорема Кёнига). | 2 |
| 2 | Написана скорость центра масс в зависимости от скорости центра цилиндра и угла поворота. | 2 |
| 3 | Правильно использован закон сохранения энергии. | 2 |
| 3 | Вывод зависимости скорости $v(x)$ оси цилиндра. | 2 |
| 4 | Вывод максимального ускорения $a_0$. | 2 |

**Solution of problem No. 3 (Inhomogemious cylinder), senior league**

The problem can be solved in an extended version: to determine plane's reaction components, their dependence on angle or time. But we will manage only with the speed and acceleration of the axis. A drawing is made and a coordinate system is entered. We model the system with a massless hoop, on which the material point with mass *m* and moment of inertia *J* (we do not pay attention to the contradiction "material point and moment of inertia"). We solve the problem within the framework of an absolutely rigid body, deformation.




Link equations

$$\begin{cases} x = R \cdot \alpha \\ x_0 = R\big(\alpha + sin(\alpha)\big) \\ y_0 = R\big(1 + cos(\alpha)\big) \end{cases}$$

Velocities and accelerations (from the coupling equations)

$$\begin{cases} \dot{x} = R \cdot \dot{\alpha} \\ \dot{x}_0 = R\big(1 + sin(\alpha)\big) \cdot \dot{\alpha} \\ \dot{y}_0 = -R \cdot sin(\alpha) \cdot \dot{\alpha} \end{cases}$$

Here $x$ - is the coordinate of wheel's center, $x_0$, $y_0$ - are the coordinates of the ball's center.
The energy conservation law when turning through a certain angle $\alpha$

$$mgR \cdot \big(1 - cos(\alpha)\big) = \frac{mR^2}{2}\left[\big(1 + cos(\alpha)\big)^2 + sin(\alpha)^2 + \frac{J}{mR^2}\right] \cdot \dot{\alpha}^2$$

Ball moves in two directions and rotates.

We enter single parameters: $l_0 = R;\ a_0 = g;\ t_0 = \sqrt{R/g}$

Energy equation in non-dimensional variables

$$2 \cdot \big(1 - cos(\alpha)\big) = \big[2\big(1 + cos(\alpha)\big) + j\big] \cdot \dot{\alpha}^2$$

Where $j = \frac{J}{mR^2}$. Hence the square of the angular velocity

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{2 \cdot \big(1 - cos(\alpha)\big)}{2\big(1 + cos(\alpha)\big) + j}$$

Obviously, maximum angular velocity (and, accordingly, maximum velocity of the cylinder axis) at $\alpha = \pi$

$$\dot{\alpha}^2{}_{max} = \frac{4}{j}$$

If we use the maximum speed value of the cylinder's axis, then

$$\dot{\alpha}^2{}_{max} = \frac{4}{j} = \frac{v^2}{Rg} \quad \rightarrow \quad j = 4\frac{Rg}{v^2}$$

Cylinder axis velocity as a function of coordinate

$$\dot{x} = \sqrt{gR}\sqrt{\frac{2 \cdot \left(1 - cos(x/R)\right)}{2\left(1 + cos(x/R)\right) + j}}$$

The derivative of the square of angular velocity leads to angular acceleration formula

$$\ddot{\alpha} = (4 + j)\frac{sin(\alpha)}{\left(2\left(1 + cos(\alpha)\right) + j\right)^2}$$

To determine the maximum of this function, we simplify it by replacing $j = 2(\beta - 1)$. After conversion

$$\ddot{\alpha} = \frac{(1 + \beta)}{2}\frac{sin(\alpha)}{\left(\beta + cos(\alpha)\right)^2}$$

We will look for the maximum square of function

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{(\beta + x)^4}$$

Where $x = cos(\alpha)$. Derivative method leads to the equation

$$x^2 - \beta x - 2 = 0$$

It's a general solution

$$x = cos(\alpha) = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 8}}{2}$$

We choose the negative root (angle must be greater than π/2)

$$x = cos(\alpha)_{max} = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 8}}{2}$$

This value determines the maximum value of angular acceleration and, accordingly, the maximum acceleration of the cylinder axis. The formula for the acceleration of the cylinder axis in dimensional form

$$\ddot{x} = (4 + j)\frac{sin(\alpha)}{\left(2\left(1 + cos(\alpha)\right) + j\right)^2} \cdot g$$

**Problem 3. Inhomogeneous cylinder**

| № | Criteria | Points |
|---|---|---|
| 1 | General formula for cylinder's kinetic energy (3) or a similar formula (König's theorem) is written. | 2 |
| 2 | Speed of the center of mass is written depending on the speed of the center of the cylinder and the angle of rotation. | 2 |
| 3 | Energy conservation law is correctly applied. | 2 |
| 3 | Derivation of the dependence of speed $v(x)$ of the axis of the cylinder. | 2 |
| 4 | Maximum acceleration output $a_0$. | 2 |