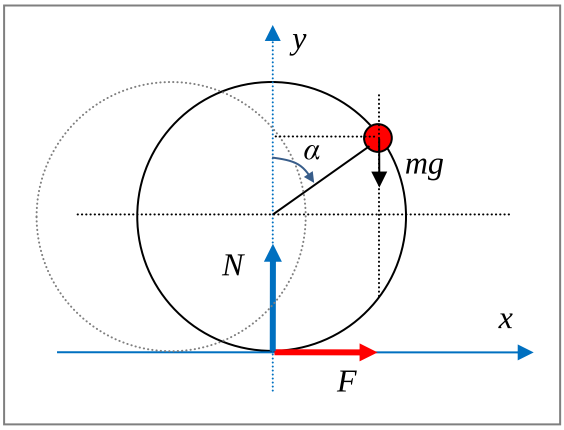
Решение задачи №3 (неоднородный цилиндр), старшая лига



Задачу можно решить в расширенном варианте: определять составляющие реакции плоскости, их зависимости от угла или времени. Но, обойдёмся только скоростью и ускорением оси. Делаем рисунок и вводим систему координат. Систему моделируем безмассовым обручем, на котором закреплена материальная точка массой m и моментом инерции J (не обращаем внимание на противоречие «материальная точка и момент инерции») Задачу решаем в рамках абсолютно твердого тела, деформация отсутствует.

Уравнения связи

$$\begin{cases} x = R \cdot \alpha \\ x_0 = R\big(\alpha + sin(\alpha)\big) \\ y_0 = R\big(1 + cos(\alpha)\big) \end{cases}$$

Скорости и ускорения (из уравнений связи)

$$\begin{cases} \dot{x} = R \cdot \dot{\alpha} \\ \dot{x}_0 = R\big(1 + sin(\alpha)\big) \cdot \dot{\alpha} \\ \dot{y}_0 = -R \cdot sin(\alpha) \cdot \dot{\alpha} \end{cases}$$

Здесь x - координата центра колеса, x_0, y_0 - координаты центра шарика.

Закон сохранения энергии при повороте на некоторый угол α

$$mgR \cdot \big(1 - cos(\alpha)\big) = \frac{mR^2}{2}\left[\big(1 + cos(\alpha)\big)^2 + sin(\alpha)^2 + \frac{J}{mR^2}\right] \cdot \dot{\alpha}^2$$

Шарик движется по двум направлениям и вращается.

Вводим единичные параметры: $l_0 = R;\ a_0 = g;\ t_0 = \sqrt{R/g}$

Энергетическое уравнение в безразмерных переменных

$$2 \cdot \big(1 - cos(\alpha)\big) = \big[2\big(1 + cos(\alpha)\big) + j\big] \cdot \dot{\alpha}^2$$

Где $j = \frac{J}{mR^2}$. Отсюда квадрат угловой скорости

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{2 \cdot \big(1 - cos(\alpha)\big)}{2\big(1 + cos(\alpha)\big) + j}$$

Очевидно, что максимум угловой скорости (и соответственно максимум скорости оси цилиндра) при $\alpha = \pi$

$$\dot{\alpha}^2{}_{max} = \frac{4}{j}$$

Если мы используем значение максимальной скорости оси цилиндра, то

$$\dot{\alpha}^2{}_{max} = \frac{4}{j} = \frac{v^2}{Rg} \quad \rightarrow \quad j = 4\frac{Rg}{v^2}$$

Скорость оси цилиндра как функция координаты

$$\dot{x} = \sqrt{gR}\sqrt{\frac{2 \cdot \big(1 - cos(x/R)\big)}{2\big(1 + cos(x/R)\big) + j}}$$

Производная квадрата угловой скорости приводит к выражению

$$\ddot{\alpha} = (4 + j)\frac{sin(\alpha)}{\left(2\left(1 + cos(\alpha)\right) + j\right)^2}$$

Задача 3. Неоднородный цилиндр

№	Критерии	Баллы
1	Написано общая формула кинетической энергии цилиндра, либо аналогичная формула (теорема Кёнига).	2
2	Написана скорость центра масс в зависимости от скорости центра цилиндра и угла поворота.	2
3	Правильно использован закон сохранения энергии.	2
3	Вывод зависимости скорости $v(x)$ оси цилиндра.	2
4	Вывод максимального ускорения a_0.	2