МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА–2022» (математика)

Первый день

Якутск 2022

Сборник содержит задачи XXIX Международной олимпиады школьников «Туймаада» по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: А. С. Голованов, К. С. Иванов, К. П. Кохась, А. С. Кузнецов, А. И. Храбров. Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

Старшая лига

1. В королевстве 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что для любых двух городов A и B, соединенных дорогой, найдется город C, не соединенный дорогой хотя бы с одним из этих двух городов. Какое наибольшее количество дорог может быть в этом королевстве?

(*P. Qiaoa, X. Zhan*)

2. Две окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке L. Прямая касается ω_1 в точке A и ω_2 в точке B (точки A и B отличны от L). На плоскости выбирается точка X. Точки Y и Z – вторые точки пересечения прямых XA и XB с ω_1 и ω_2 соответственно. Докажите, что все точки X, для которых $AB \parallel YZ$, лежат на одной окружности.

(*К. Иванов*)

3. Можно ли раскрасить все натуральные числа в три цвета так, чтобы количества делителей каждых двух цветов у каждого натурального числа отличались не более чем на 2?

(*А. Голованов*)

4. Для любых положительных чисел a_1, a_2, …, a_6 докажите неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{a_1}{a_2+a_3+a_4}}+\sqrt[4]{\frac{a_2}{a_3+a_4+a_5}}+\ldots+\sqrt[4]{\frac{a_6}{a_1+a_2+a_3}}\geqslant 2.$$

(*А. Храбров*)

Младшая лига

1. У Пети и Васи на столе стоит вазочка с 1500 конфетами, а под столом — огромный мешок с запасными конфетами. Они делают ходы по очереди, начинает Петя. В свой ход участник может или слопать 7 конфет из вазочки или достать из-под стола 6 конфет и добавить их в вазочку. При этом игрок не имеет права два хода подряд залезать под стол. Выигрывает игрок, после хода которого в вазочке не осталось конфет. Если же очередной игрок не может сделать ход, объявляется ничья. Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия?

(*А. Голованов*)

2. Даны целые числа a, b, c и нечетное простое число p. Докажите, что $x^2 + y^2 + ax + by + c$ при некоторых целых x и y делится на p.

(*А. Голованов*)

3. Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине B пересекаются в точке I. Перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую IC, пересекает прямую IA в точке D, а перпендикуляр, опущенный из B на прямую IA, пересекает IC в точке E. Докажите, что центр описанной окружности треугольника IDE лежит на прямой AC.

(*А. Кузнецов*)

4. На плоскости отмечено несколько «хороших» и несколько «плохих» точек и проведено несколько отрезков. Каждый отрезок соединяет хорошую точку с плохой, причём из каждой точки выходит не более 100 отрезков. Имеются краски 200 цветов. У каждого отрезка одну половину красят в один из этих цветов, а другую — в другой. Всегда ли удастся добиться того, чтобы любые два отрезка с общим концом были окрашены в четыре разных цвета?

(*M. Qi, X. Zhang*)

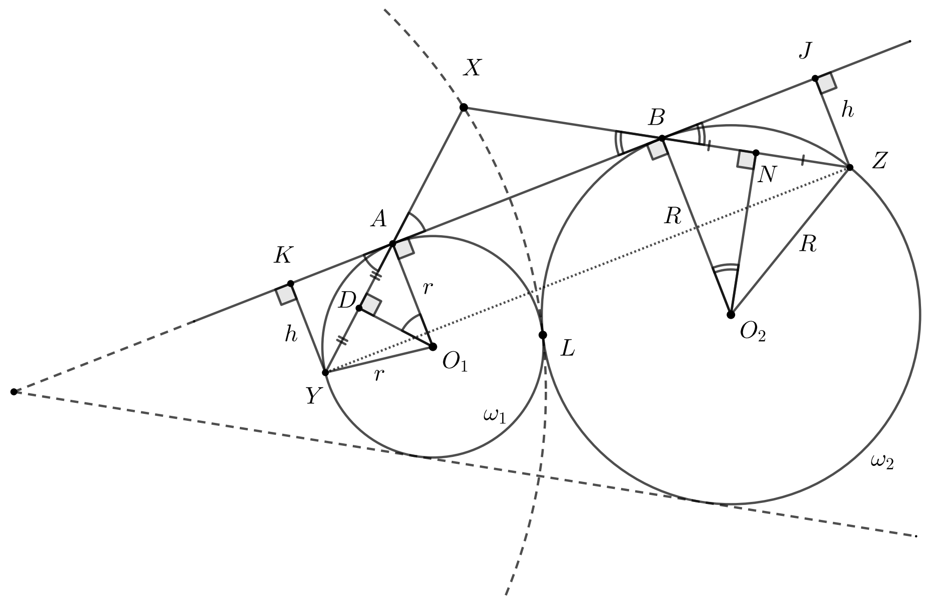
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Старшая лига

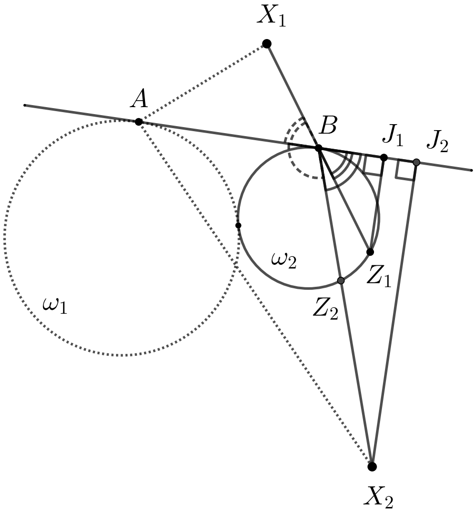
1. О т в е т: $98 \cdot 100/2$ дорог. Такое количество дорог получается, если каждые два города в стране соединить дорогой, а после этого разбить города на 50 пар и удалить 50 дорог, соединяющих города в парах: итого будет $99 \cdot 100/2 - 50 = 98 \cdot 100/2$ дорог.

В стране не может быть двух городов, из которых выходит по 99 дорог (обозначив их через A и B, сразу получаем противоречие с условием). Если имеется один город, соединенный со всеми остальными, то суммарно из всех городов выходит не более $99 + 99 \cdot 98$ дорог. Однако, эта сумма учитывает каждую дорогу два раза, и поэтому должна быть четна, следовательно, она не превосходит $98 + 99 \cdot 98 = 98 \cdot 100$, а количество дорог не превосходит половины этого числа. Если же в стране вообще нет городов, из которых выходит 99 дорог, то из каждого города выходит не более 98 дорог и суммарное число дорог не превосходит $98 \cdot 100/2$.

2. Обозначим центры окружностей ω_1 и ω_2 через O_1 и O_2, пусть r и R — их радиусы соответственно. Можно заметить, что в силу параллельности $AB \parallel YZ$ точки Z и Y находятся на одинаковом расстоянии от AB. Обозначим это расстояние через h.



Пусть K, D, N, J – основания перпендикуляров, опущенных из точек Y, O_1, O_2, J на прямые AB, AY, BZ, AB соответственно. Очевидно, N — середина BZ, и $JZ = h$. Пусть $\angle YAK = \alpha$, $\angle ZBJ = \beta$. Тогда $\angle ZBO_2 = 90° - \beta$, $\angle BO_2N = 90° - (90° - \beta) = \beta$. Теперь мы получаем, что $\dfrac{JZ}{BZ} = \dfrac{h}{BZ} = \sin\beta$, $\dfrac{BN}{BO_2} = \dfrac{BZ/2}{R} = \sin\beta$, откуда $\sin^2\beta = \dfrac{h}{2R}$. Положения точки X могут быть различными, из-за чего угол XBA не всегда равен β (на следующей картинке приведены два возможных положения точки X, обозначенные как X_1 и X_2. Видно, что $\angle X_1BA = \beta$ и $\angle X_2BA \neq \beta$).



Эту неприятность можно обойти следующим образом — так как углы $\angle XBA$ и $\angle JBZ = \beta$ — это углы между прямыми XB и XA, то $\angle XBA$ может быть равен β или $180° - \beta$. В любом случае имеем $\sin\angle XBA = \sin\beta$. Таким образом, получаем, что $\sin^2\angle XBA = \dfrac{h}{2R}$. Аналогично, $\sin^2\angle XAB = \dfrac{h}{2r}$. По теореме синусов для треугольника XAB получаем, что $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{\sin\angle XBA}{\sin\angle XAB} = \sqrt{\dfrac{r}{R}}$, что есть величина, не зависящая от положения точки X.

Хорошо известно, что для фиксированных точек плоскости A и B, и положительного числа $d \neq 1$ геометрическое место точек X, для которых $AX : BX = d$ представляет собой окружность, которая называется *окружностью Аполлония*. Таким образом, точка X из условия задачи лежит на окружности Аполлония точек A и B с коэффициентом $d = \sqrt{\frac{r}{R}} \neq 1$.

Примечание: центр найденной окружности совпадает с точкой пересечения общих внешних касательных к ω_1 и ω_2.

3. О т в е т: да, можно. Удастся даже добиться того, что упомянутые количества будут отличаться не более чем на 1.

Для каждого $r = 0,\ 1,\ 2$ покрасим в цвет с номером r все натуральные числа, в разложении которых на простые множители количество сомножителей (с учётом кратности) даёт остаток r при делении на 3. Иными словами, число

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

мы красим в цвет $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \bmod 3$.

Проверим, что эта раскраска подходит.

П е р в о е р е ш е н и е. Пусть $a_{n,0}$, $a_{n,1}$ и $a_{n,2}$ — количества делителей n, у которых количество простых сомножителей даёт при делении на 3 остаток 0, 1 и 2 соответственно (т. е. количества делителей нулевого, первого и второго цвета). Докажем, что разность любых двух из этих чисел не превосходит 1. Доказательство мы проведём индукцией по количеству *разных* простых делителей n. Если количество простых делителей равно 0, то $n = 1$, $a_{n,0} = 1$, $a_{n,1} = 0$, $a_{n,2} = 0$. Пусть наше утверждение верно для некоторого n. Докажем его для числа $m = np^k$, где p — простое число, не делящее n. Разобьём все делители числа m на $k+1$ группу — обозначим эти группы $G_0, \ldots, G_k$. При каждом s от 0 до k группа G_s содержит делители, содержащие p ровно в s-й степени. Если $s \equiv 0 \pmod 3$, группа G_s содержит $a_{n,0}$ делителей нулевого цвета, $a_{n,1}$ делителей первого цвета и $a_{n,2}$ второго цвета; если $s \equiv 1 \pmod 3$, то G_s содержит $a_{n,2}$, $a_{n,0}$ и $a_{n,1}$ делителей цветов 0, 1, 2 соответственно; наконец, если $s \equiv 2 \pmod 3$, то G_s содержит соответственно $a_{n,1}$, $a_{n,2}$ и $a_{n,0}$ делителей. Как видно, объединение вида $G_k \cup G_{k+1} \cup G_{k+2}$ содержит поровну делителей всех трёх цветов. При $s \equiv 2 \pmod 3$ все группы разбиваются на такие тройки, и у числа m делителей всех трёх цветов поровну. Если $s \equiv 0 \pmod 3$, нераспределённой по тройкам остаётся одна группа — G_s, поэтому разности количеств делителей трёх цветов у числа числа m такие же, как у чисел $a_{n,0}$, $a_{n,1}$ и $a_{n,2}$. Наконец, если $s \equiv 1 \pmod 3$, остаются нераспределёнными две группы (G_{s-1} и G_s), которые содержат $a_{n,1} + a_{n,2}$ делителей нулевого цвета, $a_{n,2} + a_{n,0}$ первого и $a_{n,0} + a_{n,1}$ второго. Разности этих чисел снова такие же, как у чисел $a_{n,0}$, $a_{n,1}$ и $a_{n,2}$, т. е. не превосходят 1, что и требовалось доказать.

Второе решение. Пусть ε — кубический корень из 1 (не обязательно вещественный). Для натурального n, являющегося произведением k простых чисел, положим $f(k) = \varepsilon^k$. Функция f мультипликативна (то есть $f(ab) = f(a)f(b)$ для взаимно простых a и b). Как известно, отсюда следует, что её *сумматорная функция* $F(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$ тоже мультипликативна. Тогда, с одной стороны,

$$F(n) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2, \tag{$*$}$$

где a_r — количество делителей числа n r-го цвета, а с другой стороны, $F(n)$ равно произведению чисел вида $F(p^s)$, где p^s — наибольшая степень p, делящая n. Если $\varepsilon \neq 1$, то число $F(p^s) = 1 + \varepsilon + \ldots + \varepsilon^s$ по модулю не превосходит 1 (в действительности, очевидно, $F(p^s)$ всегда равно или 0, или 1, или $1 + \varepsilon = -\varepsilon^2$). Подставляя в $(*)$ вместо ε все три кубических корня из 1, т. е. 1, $\rho = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ и ρ^2, получаем, что $a_0 + a_1 + a_2 = d(n)$, $|a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2| \leqslant 1$, $|a_0 + a_1\rho^2 + a_2\rho| \leqslant 1$, откуда линейными преобразованиями получаем, что числа a_0, a_1, a_2 отличаются друг от друга не более чем на 1.

4. Лемма. Для любых положительных x, y, z и t

$$\sqrt[4]{\frac{x^2}{y^2+z^2+t^2}} \geqslant \frac{2x}{x+y+z+t}.$$

Доказательство.

$$\frac{x+y+x+t}{2x} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y+z+t}{x}\right) \geqslant \sqrt{\frac{y+z+t}{x}} = \sqrt[4]{\frac{(y+z+t)^2}{x^2}} \geqslant \sqrt[4]{\frac{y^2+z^2+t^2}{x^2}}.$$

Взяв обратные величины левой и правой частей, получаем требуемое.

Обозначим $x_1 = \sqrt{a_1}$, $x_2 = \sqrt{a_2}$ и т. д. Пусть $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$. Применим лемму к каждому слагаемому исходной суммы:

$$\sqrt[4]{\frac{x_1^2}{x_2^2+x_3^2+x_4^2}} + \sqrt[4]{\frac{x_2^2}{x_3^2+x_4^2+x_5^2}} + \ldots + \sqrt[4]{\frac{x_6^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{2x_1}{x_1+x_2+x_3+x_4} + \frac{2x_2}{x_3+x_4+x_5+x_6} + \ldots + \frac{2x_6}{x_6+x_1+x_2+x_3}\right) \geqslant$$
$$\geqslant 2\left(\frac{x_1}{S} + \frac{x_2}{S} + \ldots + \frac{x_6}{S}\right) = 2,$$

что и требовалось.

Младшая лига

1. Ответ: выигрывает Вася.

Пусть перед ходом Пети в вазочке $15k$ конфет, где k — натуральное число. Покажем, как может действовать Вася, чтобы через два хода (т. е. после двух ходов каждого игрока) перед очередным ходом Пети в вазочке находилось $15(k-1)$ конфет, и до этого момента вазочка не оказывалась пустой.

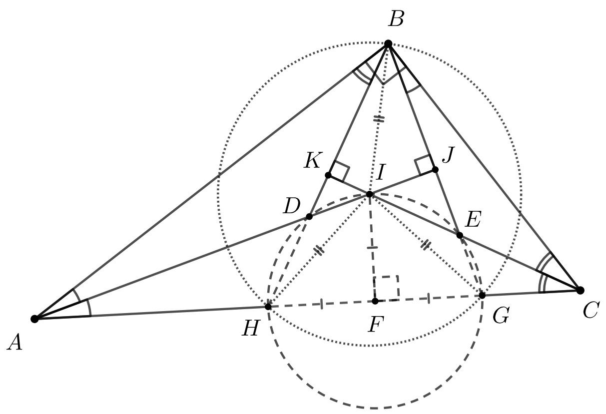
Если первым ходом Петя добавит в вазочку 6 конфет, то следующим он должен будет съесть 7. Пусть Вася в обоих случаях съест по 7 конфет, и в результате конфет останется $15k-15$. В случае, когда Петя съест 7 конфет, Вася тоже съест 7 и в вазочке останется $15k-14>0$ конфет. Если после этого Петя сможет съесть ещё 7 конфет (оставив в вазочке $15k-21\neq 0$ конфет, Вася добавит 6 и получит $15k-15$. А если Петя добавит в вазочку 6 конфет, Вася съест 7 с тем же результатом.

Повторив эти действия 100 раз, Вася выиграет.

2. Подставим $x=0,1,\ldots,p-1$ в многочлен $f(x)=x^2+ax+c$. Полученные значения будут давать не менее $\frac{p+1}{2}$ разных остатков при делении на p. Действительно, если x_1 и x_2 — два разных числа от 0 до $p-1$ и $f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+ax_1+c-(x_2^2+ax_2+c)=(x_1-x_2)(x_1+x_2+a)$ кратно p, то x_1+x_2+a кратно p, т. е. для каждого x_1 от 0 до $p-1$ на том же отрезке найдётся не более одного $x_2\neq x_1$ такого, что $f(x_2)$ и $f(x_1)$ дают одинаковые остатки при делении на p.

Аналогичное рассуждение показывает, что значения многочлена $g(y)=-y^2-by$ дают при делении на p не менее $\frac{p+1}{2}$ различных остатков при делении на p. Два построенных множества остатков, каждое из которых содержит более половины всех остатков от деления на p, должны иметь общий элемент. Таким образом, для некоторых целых x и y разность $f(x)-g(y)$ делится на p, q.e.d.

3. Пусть точки K и J — основания перпендикуляров, опущенных из точки B на прямые IC и IA соответственно, а H и G — точки пересечения этих перпендикуляров с прямой AC, тоже соответственно. Обозначим через F середину отрезка HG.



Пусть $\angle GAI=\angle IAB=\alpha$ и $\angle BCI=\angle ICA=\beta$. Сумма углов треугольника ABC равна $90^\circ+2\alpha+2\beta=180^\circ$, откуда $\alpha+\beta=45^\circ$. По аналогичным соображениям для треугольника ABJ имеем $\angle ABJ=90^\circ-\alpha$ и, как следствие, $\angle GBC=\angle ABC-\angle ABJ=90^\circ-(90^\circ-\alpha)=\alpha$. Аналогично $\angle ABH=\beta$. Таким образом, $\angle HBG=\angle ABC-(\angle ABH+\angle GBC)=90^\circ-45^\circ=45^\circ$.

Так как AJ — биссектриса и высота в треугольнике ABG, она также и серединный перпендикуляр к BG. Аналогично KC — серединный перпендикуляр к BH. Таким образом, I является точкой пересечения серединных перпендикуляров в треугольнике HBG. Значит, прямая IF в треугольнике HIG является серединным перпендикуляром, то есть, одновременно медианой и высотой, т. е. треугольник HIG равнобедренный.

Поскольку точка I — центр описанной окружности треугольника HBG, $\angle HIG = 2\angle HBG = 90°$, т. е. треугольник HIG не только равнобедренный, но и прямоугольный, значит, его углы равны $45°, 45°, 90°$. По свойству медианы прямоугольного треугольника $HF = IF = GF$, т. е. точки H, I, G лежат на окружности с центром F и радиусом FH. Проверим, что точки D и E тоже лежат на этой окружности. В треугольнике BJD имеем $\angle BDJ = 180° - 90° - 45° = 45°$, то есть, $\angle HDI = 180° - 45° = 135°$. Угол $IGH = 45°$ мы уже нашли ранее. Таким образом, получаем, что $\angle HDI + \angle HGI = 180°$, то есть, $IGHD$ — вписанный четырёхугольник. Аналогично устанавливаем, что точка E лежит на той же окружности.

Примечание: есть и другие решения, частично совпадающие с приведённым. Например, можно заметить, что четырёхугольники $AHIB$ вписан, или что точка пересечения DG и AB лежит на описанной окружности HBG.

4. Ответ: да.

Сопоставим плохим и хорошим точкам вершины, а отрезкам ребра графа, полученный двудольный граф обозначим через T, а его доли — через V_1 и V_2. Пусть граф T' — копия графа T, копии долей V_1 и V_2 назовем V_1' и V_2', а копию произвольной вершины A будем обозначать A'. Построим двудольный граф, являющийся объединением графов T и T'. В одну его долю поместим доли V_1 и V_2', а в другую — V_2 и V_1'. Выберем некоторую вершину A в подграфе T, у которой степень $d < 100$. Тогда вершина $A' \in T'$ лежит в другой доле и тоже имеет степень d. Проведём между A и A' ещё $100 - d$ рёбер. Будем повторять процедуру, пока степени всех вершин в графе не станут равны 100.

Мы получили граф Q, в котором все степени вершин одинаковы, т. е. *однородный* граф. В этом графе, вообще говоря, имеются кратные ребра, но это несущественно для дальнейших рассуждений.

Теперь нам потребуется следующая известная *теорема Холла.* Если в двудольном графе G выполнено условие Холла, то в нём найдётся такой набор рёбер R, что из каждой вершины G выходит ровно одно ребро из набора R. Такой набор называется *совершенным* или *полным паросочетанием* вершин графа G. Условие Холла: для любого k и любого набора из k вершин, лежащих в одной доле графа G, количество различных вершин, смежных с ними, не менее k.

Проверим, что теперь в графе Q выполнено условие Холла. Действительно, из любых k вершин одной доли выходит в другую долю ровно $100k$ рёбер. Но если эти $100k$ ребер приходили бы меньше чем в k вершин в другой доле, то по принципу Дирихле в какую-то вершину пришло бы больше 100 рёбер, что невозможно.

Таким образом, в Q можно выделить полное паросочетание, покрасить ребра этого паросочетания в первый цвет и удалить из Q. Останется однородный граф, в котором степени всех вершин равны 99. Для него аналогично выполняется условие Холла, значит, можно выделить паросочетание, покрасить его во второй цвет и удалить из Q и т. д. Повторяя данные рассуждения, мы покрасим все рёбра Q в 100 цветов так, чтобы в каждой вершине сходились только разноцветные рёбра (такая раскраска рёбер графа называется *правильной* раскраской рёбер).

Теперь рассмотрим подграф T графа Q. Так как рёбра Q имеют правильную раскраску в 100 цветов, рёбра T, очевидно, тоже имеют правильную раскраску в 100 цветов. Для завершения решения осталось для каждого цвета s завести два оттенка s_1 и s_2, и две половинки каждого ребра цвета s произвольным образом раскрасить в разные оттенки s_1 и s_2.