МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА „ТУЙМААДА–2021“

(математика)

Второй день

Якутск 2021

Сборник содержит задачи XXVIII Международной олимпиады школьников „Туймаада“ по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: М. А. Антипов, С. Л. Берлов, Н. Ю. Власова, А. С. Голованов, К. П. Кохась, А. С. Кузнецов, Е. М. Лопатин, Д. Ю. Ширяев. Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

© Министерство образования и науки РС(Я), 2021.

Старшая лига

5. Синусы трех острых углов образуют арифметическую прогрессию, а их косинусы — геометрическую. Докажите, что все три угла равны.

(*С. Берлов*)

6. На доске $n \times n$ $(n > 1)$ отмечено k клеток. Требуется переставить строки и столбцы так, чтобы все отмеченные клетки оказались не ниже главной диагонали. При каком наибольшем k это гарантированно возможно?

(*М. Антипов*)

7. Дан остроугольный треугольник ABC, $AC \neq BC$. Высоты, роведенные из вершин A и B, пересекаются в точке H и пересекают биссектрису внешнего угла C в точках Y и X соответственно. Биссектриса внешнего угла AHB пересекает отрезки AX и BY в точках P и Q соответственно. Докажите, что если $PX = QY$, то $AP + BQ \geqslant 2CH$.

(*Д. Ширяев, Е. Лопатин*)

8. В последовательности квадратных трёхчленов P_n каждый трёхчлен, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Первые два трехчлена не имеют общих корней. Может ли случиться, что при каждом n у P_n есть целый корень?

(*А. Голованов*)

Младшая лига

5. На доске 100×100 отмечено 110 клеток. Верно ли, что можно так переставить строки и столбцы, чтобы все клетки отмеченные оказались не ниже главной диагонали?

(*М. Антипов*)

6. Даны вещественное число $y > 1$ и натуральное число $n \leqslant y^{50}$, у которого все простые делители не превосходят y. Докажите, что n можно разложить в произведение 99 натуральных множителей (не обязательно простых), каждый из которых не превосходит y.

(*G. Martin, A. Parvardi*)

7. Есть куча из 2021^{2021} камней. За один ход можно разбить любую кучу на две части, количества камней в которых отичаются на степень двойки с целым неотрицательным показателем. После нескольких ходов оказалось, что количество камней в каждой кучке — степень двойки с целым неотрицательным показателем. Докажите, что было сделано четное число ходов.

(*М. Антипов*)

8. См. задачу 7 старшей лиги.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Старшая лига

5. Первое решение. Предположим, что углы $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ удовлетворяют условию задачи. Заметим, что если какие-то два из этих углов равны, то арифметическая прогрессия постоянна и тогда все три угла равны, поэтому можно считать, что оба неравенства строгие. На промежутке $[0^\circ, 90^\circ]$ синус возрастает, а косинус убывает. Следовательно, $\sin\beta$ и $\cos\beta$ — средние члены в своих прогрессиях. Перепишем условие следующим образом:

$$2\sin\beta = \sin\alpha + \sin\gamma, \quad \cos^2\beta = \cos\alpha\cdot\cos\gamma.$$

Возведем первое равенство в квадрат и прибавим второе, домноженное на 4:

$$4 = 4\sin^2\beta + 4\cos^2\beta = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\gamma + \sin^2\gamma + 4\cos\alpha\cos\gamma \leqslant \\ \leqslant 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\gamma + 2\cos^2\alpha + 2\cos^2\gamma = 4.$$

Тогда неравенство в центре должно обращаться в равенство, что возможно только при $\sin\alpha = \sin\gamma$. Противоречие.

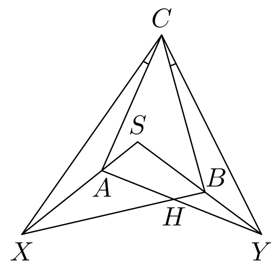
Второе решение. Положим $f(x) = \ln\cos\arcsin x$, $x \in [0, 1)$. Допустим, что эти углы различны и числа x_1, x_2, x_3 — значения синусов — образуют арифметическую прогрессию. Тогда числа $y_i = f(x_i)$ в том же порядке образуют арифметическую прогрессию (потому что f — монотонная функция, ниже мы вычислили ее производную). Значит, точки декартовой плоскости (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) лежат на одной прямой и эти же точки лежат на графике функции $y = f(x)$. Таким образом, некоторая прямая пересекает график функции $f(x)$ в трех точках. Это невозможно, поскольку функция $f(x)$ вогнута на промежутке $[0, 1)$. Действительно, $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$, $f'(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $f''(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$.

6. Ответ: $n+1$.

Докажем индукцией по n, что если на доске отмечено $k \leqslant n+1$ клеток, то всегда можно переставить строки и столбцы так, что отмеченные клетки окажутся не ниже главной диагонали. База $n = 2$ тривиальна. Докажем переход. Выберем строку R, в которой отмечено хотя бы две клетки (если такой строки нет, то $k \leqslant n$, и тогда выберем любую строку с хотя бы одной отмеченной клеткой). Далее выберем столбец C, в котором нет отмеченных клеток, кроме, возможно, клетки на пересечении с R. Такой столбец найдется, так как иначе вне строки R находится не менее n отмеченных клеток, что не так по выбору этой строки. Переставим строку R так, чтобы она стала верхней строкой таблицы, а столбец R — левым столбцом. К оставшейся части таблицы $(n-1)\times(n-1)$ применим индукционное предположение.

Приведем пример, когда $k = n+2$, и при этом невозможно переставить строки и столбцы так, чтобы отмеченные клетки оказались не ниже главной диагонали. Пусть отмеченные клетки — это клетки квадратика 2×2, примыкающий к левому верхнему углу, а также все остальные клетки главной диагонали. Докажем индукцией по n, что переставить строки и столбцы не удастся. База $n = 2$ очевидна. Предположим, что для некоторого $n > 2$ получилось переставить. Выберем строку, содержащую одну отмеченную клетку. Столбец, содержащий эту клетку, других отмеченных клеток не содержит. Если отмеченная клетка находится не на главной диагонали (то есть расположена правее и выше неё), то столбец, содержащий эту клетку, можно сдвинуть влево, чтобы эта клетка попала на главную диагональ. При этом остальные столбцы либо останутся на своих местах, либо сдвинутся вправо, от чего условие не нарушится. Когда отмеченная клетка оказалась на главной диагонали, можно удалить строку и столбец, которые её содержат, и применить индукционное предположение.

7. Для начала напомним одно определение и одну лемму. Прямые, проходящие через вершину угла и симметричные относительно его биссектрисы, называются *изогональными* относительно этого угла.



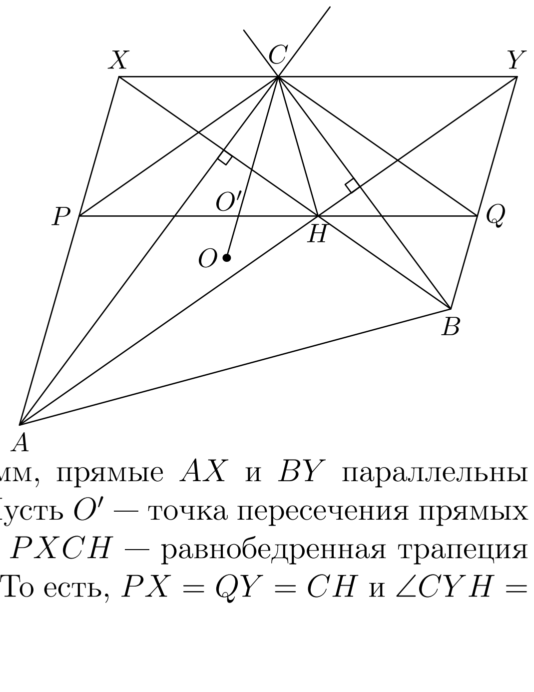
Лемма (об изогоналях). Пусть прямые CA и CB изогональны относительно угла XCY, прямые XA и YB пересекаются в точке S, а прямые XB и YA пересекаются в точке H. Тогда CS и CH также изогональны.

Применим эту лемму к нашей задаче. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда $\angle ACO = \angle BCH$, т. е. прямые CO и CH симметричны относительно биссектрисы угла ACB, и поэтому они изогональны относительно угла XCY.

Докажем, что прямые AX, BY, CO всегда (вне зависимости от условия $PX = QY$) пересекаются в одной точке, или параллельны, если эта точка бесконечно удаленная. Действительно, относительно угла XCY прямые CA и CB изогональны. Тогда по лемме об изогоналях прямая CH и прямая, идущая из точки C в точку пересечения $XA \cap YB$, тоже изогональны, что и требуется.

Теперь докажем, что в условиях нашей задачи прямые AX, BY, CO параллельны. По предыдущему утверждению для этого достаточно проверить, что прямые AX и BY параллельны. Пусть $\angle ACB = \gamma$. Тогда $\angle YCB = \angle XCA = 90^\circ - \gamma/2$, $\angle AHB = 180^\circ - \gamma$, и $\angle CYH = \angle CXH = \angle YHQ = \gamma/2$. Следовательно, $YX \parallel PQ$. А так как $YQ = XP$, то $YXPQ$ — параллелограмм или равнобедренная трапеция.

Предположим, что $YXPQ$ — равнобедренная трапеция. Тогда $\angle QYX = \angle YXP$, и так как $\angle CYH = \angle CXH$, $\angle BYA = \angle BXA$. Получаем, что четырехугольник $YXAB$ — вписанный, и в нем $YB = XA$ (хорды, стягивающие равные дуги). Следовательно, $YXAB$ — равнобедренная трапеция (или прямоугольник) и $YX \parallel AB$. Но это значит, что биссектриса внешнего угла C треугольника ABC параллельна основанию AB, что возможно только при $AC = BC$. Значит, этот случай невозможен.



Таким образом, $YXPQ$ — параллелограмм, прямые AX и BY параллельны (и тогда прямая CO им тоже параллельна). Пусть O' — точка пересечения прямых PQ и CO. Тогда $PXCO'$ — параллелограмм, $PXCH$ — равнобедренная трапеция (в силу той же изогональности в угле XCY). То есть, $PX = QY = CH$ и $\angle CYH =$

$\angle HXC = \angle XCP$. Значит, $CP \parallel AY$ и аналогично $CQ \parallel BX$, откуда получаем

$$\frac{AP+BQ}{CH} = \frac{AP}{PX} + \frac{BQ}{QY} = \frac{CY}{CX} + \frac{CX}{CY} \geqslant 2.$$

8. По индукции легко доказывается, что при $n \geqslant 0$

$$P_{n+2}(x) = F_n P_1(x) + F_{n+1} P_2(x), \tag{$*$}$$

где F_n — n-е число Фибоначчи. Пусть x_n — целый корень P_n. Подставляя x_{n+2} в равенство $(*)$, получаем

$$F_n P_1(x_{n+2}) + F_{n+1} P_2(x_{n+2}) = 0.$$

А так как P_1 и P_2 не имеют общих корней, мы сразу делаем вывод, что x_{n+2} не является корнем ни P_1, ни P_2. Тогда

$$-\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{P_1(x_{n+2})}{P_2(x_{n+2})}. \tag{$**$}$$

Хорошо известно, что $(F_n, F_{n+1}) = 1$, то есть дроби $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ несократимы, а поскольку $F_n < F_{n+1}$ при $n > 1$, т.е. знаменатели (и числители) этих несократимых дробей возрастают, все эти дроби различны. Из этого следует, что все x_n различны, и тогда (поскольку они целые) $|x_n| \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Не менее хорошо, а может быть, даже чуть лучше, известно, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Тогда, устремляя n к бесконечности в равенстве $(**)$, получаем, что отношение старшего коэффициента P_1 к старшему коэффициенту P_2 равно $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Докажем, что на самом деле отношение старших коэффициентов P_1 и P_2 должно быть рациональным. Не умаляя общности будем считать, что старший коэффициент P_1 равен 1 (если мы поделим все коэффициенты P_1 и P_2 на одно и то же число, то корни у P_n не изменятся). *Квадратично-рациональной функцией* будем называть функцию, равную частному двух квадратных трехчленов, причем дополнительно будем требовать, что трехчлены не имеют общих корней, а старший коэффициент квадратного трехчлена в числителе равен 1.

Лемма. Пусть q_i, r_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, — вещественные числа, причем числа q_i попарно различны. Тогда существует не более одной квадратично-рациональной функции f, удовлетворяющей уравнениям $f(q_i) = r_i$, $i = 1, \ldots, 5$.

Действительно, если $\frac{u_1}{v_1}$ и $\frac{u_2}{v_2}$ — две такие функции, то числитель их разности, т. е. многочлен $u_1v_2 - u_2v_1$ имеет пять корней. Осталось заметить, что этот многочлен не выше четвертой степени и при этом он не равен тождественно нулю.

Возвращаясь к решению задачи, заметим, что квадратично-рациональная функция $P_1(x)/P_2(x)$ в пяти целых точках x_{k+2} при $k = 1, 2, 3, 4, 5$ принимает рациональные значения $-F_{k+1}/F_k$ (таких условий можно брать бесконечно много, но мы рассмотрим только пять). По лемме функция, обладающая этим свойством, единственна, раз уж она существует. С другой стороны, пять таких условий задают линейную систему с пятью уравнениями и пятью неизвестными — коэффициентами P_1, P_2. У этой системы, как мы доказали, решение существует и единственно, и значит, оно рациональное, потому что коэффициенты системы рациональны и неизвестные выражаются через них методом Гаусса (или по формулам Крамера).

Младшая лига

5. Ответ: нет.

Строки и столбцы не удастся переставить, если среди отмеченных клеток имеются 102 клетки, описанные в примере из решения задачи 6 старшей лиги ($n = 100$, $k = 102$).

6. Пусть $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_r$ — простые множители числа n. Жадным алгоритмом раскладываем их по 99 «стаканам» — каждое очередное p_s кладем в любой из стаканов, произведение чисел в котором минимально. Произведение чисел, уже помещенных в i-й стакан, обозначим b_i (вначале все числа b_i считаем равными 1). Если очередное p_s не влезает ни в один стакан, то при всех i $b_i > y/p_s$ и

$$(y/p_s)^{99} p_s < b_1 b_2 \ldots b_{99} p_s \leqslant n \leqslant y^{50}.$$

Из последнего неравенства следует, что $y^{49} < p_s^{98}$, то есть $p_s > \sqrt{y}$. А так как все $b_i \geqslant p_s$ (в каждый стакан уже положили хотя бы по одному простому, которое не меньше p_s), то $n \geqslant b_1 b_2 \ldots b_{99} p_s \geqslant p_s^{100} > y^{50}$. Противоречие.

7. Для краткости мы будем называть остаток, который даёт при делении на 3 количество камней в куче, просто остатком от деления этой кучи на 3 (вероятно, понятие остатка так и возникло). Рассмотрим, какие остатки от деления на 3 могут иметь две новые кучи в зависимости от того, из какой кучи они получены. Так как никакая степень двойки не кратна 3, новые кучи имеют разные остатки от деления на 3. Тогда из кучи с остатком 0 можно получить только кучи с остатками 1 и 2. Из кучи с остатком 1 можно получить только кучи с остатками 0 и 1. Из кучи с остатком 2 можно получить только кучи с остатками 0 и 2. Легко заметить, что при каждой операции количество куч с остатком 0 изменяется ровно на 1. Так как и в начале, и в конце процесса нет куч с остатком 0, произошло четное количество операций.

8. См. решение задачи 7 старшей лиги.