МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА „ТУЙМААДА–2020“

(математика)

Второй день

Якутск 2020

Сборник содержит задачи XXVII Международной олимпиады школьников „Туймаада“ по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: Ф. Л. Бахарев, С. Л. Берлов, Н. Ю. Власова, А. С. Голованов, К. П. Кохась, Е. М. Лопатин. Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

Старшая лига

5. На плоскости нарисованы координатные оси (без разметки, масштаб на осях одинаков) и график квадратного трехчлена $y = x^2 + ax + b$. Числа a и b неизвестны. Как с помощью циркуля и линейки построить отрезок единичной длины?

(*С. Берлов*)

6. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 лежат внутри угла ABC, касаются сторон AB и BC в точках A и C соответственно, а также касаются друг друга внешним образом в точке X. Сторона AC вторично пересекает окружности в точках Y и Z. O — центр описанной окружности треугольника XYZ. Прямые O_2O и O_1O пересекают прямые AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. Докажите, что точка B является центром описанной окружности треугольника A_1OC_1.

(*Е. Лопатин*)

7. Несколько полицейских ловят вора, у которого есть $2m$ сообщников. Для этого полицейские организуют слежку за сообщниками. В начале полицейские ни за кем не следят. Каждый день утром каждый полицейский добавляет в список тех, за кем он следит, одного сообщника. Каждый день вечером вор теряет доверие к одному из своих сообщников. Вор будет пойман, если вечером m-го дня кто-то из полицейских будет следить ровно за теми m сообщниками, которым к этому времени вор все еще доверяет. Докажите, что для гарантированной поимки вора требуется не менее 2^m полицейских.

(*W. B. Kinnersley, D. B. West*)

8. Многочлены P и Q степени не выше n с вещественными коэффициентами удовлетворяют тождеству

$$P(x)x^{n+1} + Q(x)(x+1)^{n+1} = 1.$$

Найдите все возможные значения $Q(-\frac{1}{2})$.

(*K. Dilcher, M. Ulas*)

Младшая лига

5. См. задачу 5 старшей лиги.

6. AK и BL — высоты остроугольного треугольника ABC. На отрезке AK выбрана точка P таким образом, что $LK = LP$. Прямая, проходящая через P параллельно BC, пересекается с прямой, проходящей через B параллельно PL, в точке Q. Докажите, что $\angle AQB = \angle ACB$.

(*С. Берлов*)

7. Сколько натуральных чисел N в диапазоне $[10, 10^{20}]$ обладают свойством: если увеличить каждую цифру числа N на 1 и полученные величины перемножить, получится число $N + 1$?

(*Ф. Бахарев*)

8. В горизонтальной клетчатой полоске $1 \times n$ на сторонах отмечены вершины всех клеток. Полоску разбивают на части, соединяя отмеченные точки отрезками, не лежащими на сторонах полоски. Отрезки не должны пересекаться во внутренних точках; верхний конец каждого отрезка должен быть расположен либо строго над нижним концом, либо правее его. Докажите, что число таких разбиений делится на 2^n. (Разбиение, в котором не проведено ни одного отрезка, тоже учитывается.)

(*E. Robeva, M. Sun*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

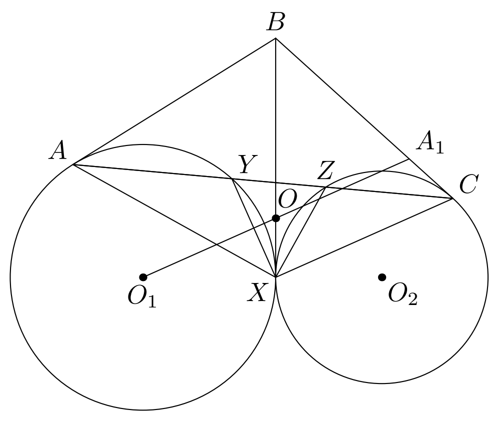
Старшая лига

5. Первое решение. Проведём прямую, параллельную оси Ox, пересекающую график. Пусть точки пересечения — P и Q, тогда серединный перпендикуляр к PQ пересекает параболу в её вершине V. Через V проведем прямую, параллельную прямой $y = x$ (т.е. биссектрисе угла между осями). Пусть она пересекла вторично параболу в точке U. Тогда проекции отрезка UV на оси координат будут иметь длину 1.

Второе решение. Расстояние от точки пересечения графика с осью Oy до точки пересечения осей равно $|b|$. Если график не проходит через начало координат ($b \neq 0$), построим точки $(\pm b, 0)$. Восстановим перпендикуляры к оси Ox в этих точках и отметим точки пересечения перпендикуляров с графиком. Таким образом, мы построили отрезки длины $|b^2 \pm ab + b|$. Мы знаем какого знака выражения под модулем (так как видим выше или ниже оси Ox лежат точки пересечения), поэтому мы можем построить отрезок длины $\left|\frac{(b^2+ab+b)+(b^2-ab+b)}{2} - b\right| = b^2$. Теперь строим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = |b|$ и $BC = b^2$. И строим подобный ему треугольник $A'B'C'$, в котором $B'C' = |b|$. В этом треугольнике $A'C' = 1$.

Если график проходит через начало координат ($b = 0$), то парабола высекает на оси Ox отрезок длины $|a|$. Аналогично предыдущему случаю найдем a^2 и затем построим отрезок длины 1.

6. Так как $AB = BC$, точка B лежит на радикальной оси окружностей ω_1 и ω_2, а этой радикальной осью является их общая касательная в точке X. Пусть $\angle ABX = 2\alpha$, $\angle CBX = 2\gamma$. Тогда



$$\angle BAX = \angle BXA = 90^\circ - \alpha,$$
$$\angle BCX = \angle BXC = 90^\circ - \gamma.$$

Заметим, что B является центром описанной окружности треугольника AXC, поэтому $\angle CAX = \gamma$, $\angle ACX = \alpha$. Наконец,

$$\angle AXY = \angle BAC = 90^\circ - \alpha - \gamma = \angle BCA = \angle ZXC,$$

где крайние равенства — это свойство угла между касательной и хордой. Теперь легко вычислить, что $\angle ZYX = 90^\circ - \alpha$, $\angle YZX = 90^\circ - \gamma$, $\angle YXB = \gamma$, $\angle BXZ = \alpha$. Из чего следует, что прямая XB содержит точку O. Кроме того, O_1O — серединный перпендикуляр к YX, и $CX \perp YX$ (из подсчета углов). Следовательно, $OO_1 \parallel XC$ и $BO = BA_1$. Аналогично, $BO = BC_1$.

7. Если полицейский следит за кем-то, кому вор не доверяет, то он не поймает вора, назовем такого полицейского лишним. Докажем, что вор может действовать жадным алгоритмом: каждый ход убирать такого сообщника, чтобы как можно больше полицейских стали лишними. На k-й день вор может убрать любого из $2m-k+1$ сообщников, каждый полезный полицейский k способами может быть быть сделан лишним. Поэтому на этом шаге доля полицейских, которых можно сделать лишними, — не менее $\frac{k}{2m-k+1}$. Осталось заметить, что

$$\prod_{k=1}^{m}\Big(1-\frac{k}{2m-k+1}\Big) = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-1}\cdot\frac{2m-5}{2m-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{m+1}.$$

Домножив числитель и знаменатель на число

$$m! = 2^{-m}\cdot 2m\cdot(2m-2)\cdot\ldots\cdot 2,$$

получаем, что значение этого произведения равно 2^{-m}.

Таким образом, если полицейских меньше 2^m, все они в какой-то момент станут лишними.

8. Ответ: 2^n.

Лемма. Так как многочлены $(x+1)^{n+1}$ и x^{n+1} взаимно просты, то условие “степень P и Q степени не выше n” определяет многочлены P и Q однозначно.

Доказательство. Пусть

$$P_1(x)x^{n+1} + Q_1(x)(x+1)^{n+1} = 1 = P_2(x)x^{n+1} + Q_2(x)(x+1)^{n+1}.$$

Перенесем всё в одну сторону:

$$(P_1(x)-P_2(x))x^{n+1} + (Q_1(x)-Q_2(x))(x+1)^{n+1} = 0.$$

Следовательно, $(P_1(x)-P_2(x))x^{n+1}$ делится на $(x+1)^{n+1}$. Многочлены x^{n+1} и $(x+1)^{n+1}$ взаимно просты, поэтому $P_1(x)-P_2(x)$ делится на x^{n+1}. Но $\deg(P_1 - P_2) \leqslant n$, поэтому $P_1(x) - P_2(x) = 0$. Аналогично получаем, что $Q_1(x) = Q_2(x)$. $\square$

Подставив в тождество $x = -1 - y$, получим

$$Q(-1-y)(-1)^{n+1}y^{n+1} + P(-1-y)(-1)^{n+1}(y+1)^n = 1.$$

В силу леммы,

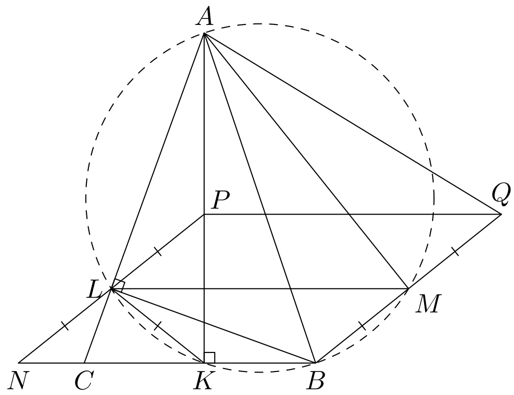
$$P(x) = (-1)^{n+1}Q(-1-x), \quad Q(x) = (-1)^{n+1}P(-1-x).$$

Подставляя $x = -\frac{1}{2}$, получим

$$P\Big(-\frac{1}{2}\Big) = (-1)^{n+1}Q\Big(-\frac{1}{2}\Big) \quad \text{и} \quad P\Big(-\frac{1}{2}\Big)\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n+1} + Q\Big(-\frac{1}{2}\Big)\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1} = 1,$$

то есть $Q(-\frac{1}{2}) = 2^n$.

Младшая лига



6. Обозначим через N точку пересечения прямых BC и LP и через M — середину BQ. В прямоугольном треугольнике NKP $KL = LP$, следовательно, KL — медиана, и $NL = LP$. Прямая LM является средней линией параллелограмма $NPQB$, то есть параллельна его основанию. Заметим, что точки A, B, K, L лежат на окружности с диаметром AB. И на этой же окружности лежит точка M, так как $MBKL$ — равнобедренная трапеция. Таким образом, $AM \perp BQ$, то есть треугольник ABQ — равнобедренный, и $\angle ABQ = \angle AQB$. Осталось доказать, что $\angle ABQ = \angle ACB$. Это равносильно тому, что $\angle CBQ = 180° - \angle CAB$. Так и есть:

$$\angle CBQ = 180° - \angle PNK = 180° - \angle CKL = 180° - \angle CAB.$$

7. Ответ: 171 число.

Пусть $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$. Тогда

$$a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_0 =$$
$$= a_n(a_{n-1}+1)\ldots(a_0+1) + a_{n-1}(a_{n-2}+1)\ldots(a_0+1) + \ldots + a_1(a_0+1) + a_0.$$

Каждое слагаемое слева больше или равно соответствующего слагаемого справа и равенство возможно, только если $a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_0 = 9$. Цифра a_n при этом может быть любой, отличной от 0. Итого, $9 \cdot 19 = 171$.

8. Будем пользоваться декартовыми координатами для обозначения отмеченных точек: так, угловые точки полоски — это $(0,0)$, $(n,0)$, $(n,1)$, $(0,1)$. Обозначим через $f(n)$ количество разбиений полоски $1\times n$.

Докажем по индукции, что $f(n)$ делится на 2^n. База: $n=1$, $f(1)=2$.

Переход. Рассмотрим некоторое разбиение P полоски $1\times(n-1)$. Сопоставим ему разбиения полоски $1\times n$ по следующему правилу: сдвинем верхнюю сторону полоски $1\times(n-1)$ на 1 вправо — в результате у всех проведенных отрезков верхний конец сдвинется на 1 вправо и получится разбиение полоски $1\times n$, удовлетворяющее условию задачи (более того, оно не будет содержать ни одного вертикального отрезка). При этом в полученном разбиении полоски $1\times n$ мы можем дополнительно провести или не проводить отрезочки из $(0,0)$ в $(1,1)$ и из $(n-1,0)$ в $(n,1)$ (при сдвиге верхней стороны эти отрезки получились из вертикальных сторон исходной полоски, они не присутствовали в качестве отрезков в разбиении P). Тем самым каждому разбиению полоски $1\times(n-1)$ мы сопоставили четыре разбиения полоски $1\times n$, не содержащие вертикальных отрезков. Легко проверить, что каждому разбиению $1\times n$ без вертикальных отрезков обратным преобразованием можно сопоставить разбиение полоски $1\times(n-1)$. Таким образом, существует ровно $4f(n-1)$ разбиений полоски $1\times n$, не содержащих вертикальных отрезков. По индукционному предположению $4f(n-1)$ делится на 2^n.

Теперь подсчитаем количество разбиений, в которых самый левый вертикальный отрезок имеет абсциссу k. Этот отрезок разбивает полоску $1\times n$ на полоску $1\times k$, в которой нет вертикальных отрезков, и полоску $1\times(n-k)$, в которой может быть любое разбиение. По аналогичным соображениям количество таких разбиений равно $4f(k-1)f(n-k)$ при $k>1$. А при $k=1$ количество разбиений равно $2f(n-1)$. В результате при любом k получаем количество способов, кратное 2^n.