МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА „ТУЙМААДА–2021“ (математика)

Первый день

Якутск 2021

Сборник содержит задачи XXVIII Международной олимпиады школьников „Туймаада“ по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: С. Л. Берлов, Н. Ю. Власова, А. С. Голованов, К. П. Кохась, А. С. Кузнецов, В. И. Франк. Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

Старшая лига

1. Многочлены F и G таковы, что

$$F(F(x)) > F(G(x)) > G(G(x))$$

для всех вещественных x. Докажите, что $F(x) > G(x)$ для всех вещественных x.

(В. Франк)

2. Точка M — середина основания AD трапеции $ABCD$. На отрезке BM отмечена точка E. Оказалось, что $\angle ADB = \angle MAE = \angle BMC$. Докажите, что треугольник BCE — равнобедренный.

(А. Кузнецов)

3. Даны положительные вещественные числа $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$. Пусть $A = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$, $B = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$. Докажите неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i b_i}{a_i B + b_i A} - 1\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^2}{a_i B + b_i A} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i^2}{a_i B + b_i A}.$$

(F .Dong, J. Ge)

4. Дано натуральное число n. Монотонный путь в квадрате $n \times n$ — это путь из левого нижнего угла в правый верхний, который идет по линиям сетки, смещаясь каждым шагом вверх или вправо.

Для каждого k, $0 \leqslant k < 2n-1$, обозначим через S_k множество всех монотонных путей, для которых количество клеток квадрата, лежащих ниже пути, дает остаток k при делении на $2n-1$. Докажите, что множества S_k имеют поровну элементов.

(M.Just, M. Schneider)

Младшая лига

1. Квадратные трехчлены F и G таковы, что

$$F(F(x)) > F(G(x)) > G(G(x))$$

для вещественных всех x. Докажите, что $F(x) > G(x)$ для всех вещественных x.

(В. Франк)

2. Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает диагональ AC в точке E, а внешняя биссектриса угла B пересекает прямую AD в точке F. Точка M — середина отрезка BE. Докажите, что прямые CM и EF параллельны.

(А. Кузнецов)

3. Дано n различных натуральных чисел. Рассмотрим все $n(n-1)/2$ попарных сумм этих чисел. Для каждой из этих попарных сумм на доску выписали количество исходных чисел, меньших этой суммы, на которые эта сумма делится. Какое наибольшее значение может принимать сумма выписанных на доске чисел?

(С. Берлов)

4. В деревне некоторые пары домов соединены дорогами. Жильцы домов, соединённых дорогой, называются соседями. Всегда ли в каждый из этих домов можно поселить рыцаря, который всегда говорит правду, либо лжеца, который всегда лжёт, чтобы каждый житель смог сказать фразу «среди моих соседей лжецов хотя бы вдвое больше, чем рыцарей»?

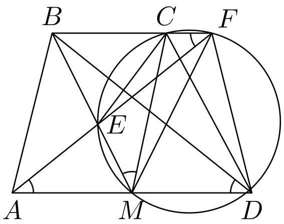
(С. Берлов)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

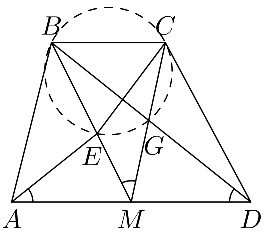
Старшая лига

1. Заметим, что из правого неравенства следует, что $F(x) > G(x)$ на всей области значений $G(x)$. Предположим, что это неравенство выполнено не для всех вещественных x, тогда по непрерывности найдется точка x_0, в которой $F(x_0) = G(x_0)$. Эта точка дает нам противоречие с левым неравенством, так как в ней значения F и G равны.

2. Первое решение. Продлим AE до пересечения с BC в точке F. Тогда $ABFD$ — равнобедренная трапеция (так как основания параллельны и диагонали идут под равными углами к основанию), треугольник BMF — равнобедренный (так как равнобедренная трапеция симметрична относительно серединного перпендикуляра к основаниям), а четырехугольник $MECF$ — вписанный (так как $\angle EMC = \angle BFE = \angle EAD$). Тогда $\angle BCE = \angle FME$, т. е. треугольники BCE и BMF подобны, и следовательно, треугольник BCE равнобедренный.



Замечание. Вообще говоря, решение зависит от положения точки F, но все равенства углов верны F независимо от того, лежит F левее или правее точки C. Если же точка F совпала с точкой C (то есть сама трапеция $ABCD$ — равнобедренная), то мы сразу из параллельности получаем $\angle BCE = \angle EAD = \angle EMC$ и далее решение следует из того же подобия.



Второе решение. Обозначим через G точку пересечения BD с MC. Тогда $\angle BCM = \angle GMD = \angle MEA$ (первое равенство из параллельности, второе — так как оба угла дополняют $\angle EMA$ и $\angle BMC = \angle EAM$ до $180°$). Следовательно, треугольники DGM и MBC подобны и $DM/MC = MG/BC$. Аналогично треугольники AME и MBC подобны и $AM/MB = ME/BC$. Из этих равенств получаем, что $MG \cdot MC = DM \cdot BC = AM \cdot BC = ME \cdot MB$, то есть четырехугольник $BCGE$ — вписанный. Тогда $\angle BEC = \angle BGC = \angle MGD = \angle MBC$ (последнее равенство — из подобия треугольников DGM и MBC), и треугольник BCE — равнобедренный.

3. На самом деле это не неравенство, а равенство. Обозначим для краткости $W_i = a_iB + b_iA$. Заметим, что

$$A\sum_{i=1}^{k}\frac{a_ib_i}{W_i} + B\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^2}{W_i} = \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i(a_iB + b_iA)}{a_iB + b_iA} = \sum_{i=1}^{k} a_i = A.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^2}{W_i} = \frac{A}{B}\left(1 - \sum_{i=1}^{k}\frac{a_ib_i}{W_i}\right)$$

и аналогично

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i^2}{W_i}=\frac{B}{A}\biggl(1-\sum_{i=1}^{k}\frac{a_ib_i}{W_i}\biggr).$$

Осталось перемножить эти два равенства.

4. Достаточно доказать, что множество всех монотонных путей можно разбить на части, каждая из которых содержит $2n-1$ путей — по одному из каждого множества S_k. Более того, мы по отдельности разобьем на такие части множество монотонных путей, начинающихся с горизонтального шага, и множество монотонных путей, начинающихся с вертикального шага.

Пусть $ABCD$ — это рассматриваемый квадрат $n\times n$, выберем какой-нибудь монотонный путь, идущий из вершины A в C, пусть AF — первый единичный отрезок пути, для определенности горизонтальный, LC — последний единичный отрезок пути (см. рис. 1–7).

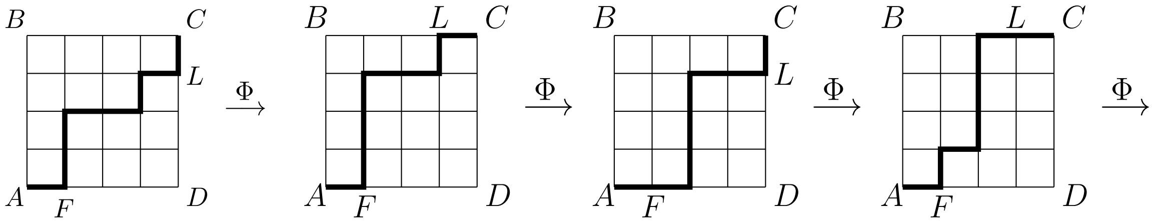


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

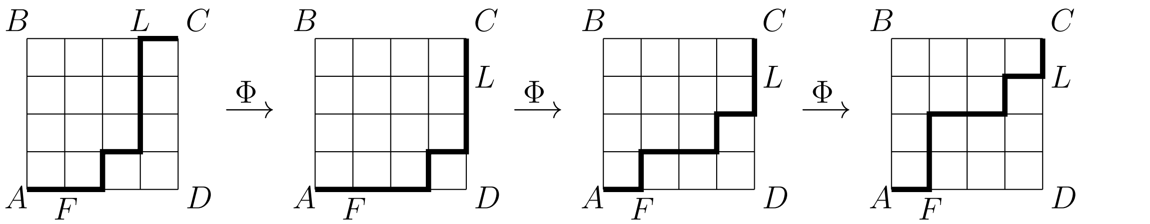


Рис. 5 Рис. 6 Рис. 7 Рис. 1

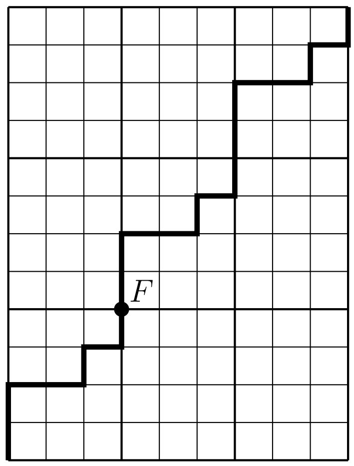
Преобразование Φ, с помощью которого мы будем получать из имеющихся путей новые, действует следующим образом. Уберем из пути отрезок LC. Если отрезок LC был вертикальным, то сразу после отрезка AF вставим вертикальный единичный отрезок, а фрагмент пути FL сдвинем на 1 вверх (таким образом из рис. 1 получен рис. 2, из рис. 3 — рис. 4 и т.д). Если же отрезок LC был горизонтальным (в качестве примера такого пути можно рассмотреть пути на рис. 2, 4, 5), то преобразование вставляет после отрезка AF горизонтальный единичный отрезок, а фрагмент пути FL сдвигает на 1 вправо.

Очевидно, описанное преобразование либо увеличивает на $n-1$ количество клеток, лежащих ниже пути, либо уменьшает это количество на n. В обоих случаях количество клеток, лежащих ниже пути, изменяется по модулю $(2n-1)$ на $+(n-1)$. Так как числа $n-1$ и $2n-1$ взаимно просты, то для каждого пути γ все пути

$$\gamma,\quad \Phi(\gamma),\quad \Phi(\Phi(\gamma)),\quad \ldots\quad \underbrace{\Phi(\ldots\Phi}_{2n-2\text{ раза}}(\gamma))$$

попарно различны (потому что у них отличаются по модулю $2n-1$ количества клеток, лежащих ниже пути). Следовательно, количества клеток, лежащих ниже пути, принимают для этой группы путей все возможные остатки по модулю $2n-1$.

Описанное преобразование можно также интерпретировать следующим образом: разобьем плоскость на прямоугольники $n\times(n-1)$, выберем диагонально расположенный ряд прямоугольников и в каждом из них нарисуем фрагмент F–C рассматриваемого пути. Получится ломаная. Отметим на ней одну из точек F. Можно считать, что выполнение преобразования каждый раз перемещает точку F вдоль ломаной на отрезок единичной длины (вверх или вправо), а вместе с этой точкой смещается и весь квадрат $n \times n$, в котором мы наблюдаем результат применения отображения Φ.

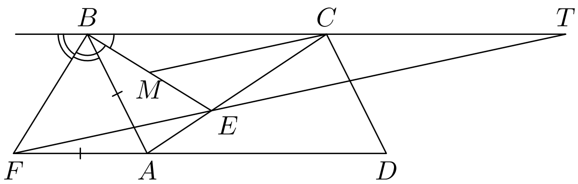


С учетом этой интерпретации ясно, что $(2n-1)$-кратное выполнение этого преобразования дает в результате исходный путь, и что сопоставление каждому пути γ всех его преобразований с помощью отображения Φ разбивает множество всех путей на группы, содержащие по $2n-1$ путей. Как мы отмечали, для каждого остатка k по модулю $2n-1$ каждая группа содержит ровно один путь из множества S_k.

Младшая лига

1. См. решение задачи 1 старшей лиги.

2. Заметим, что $AB = AF$, так как угол BAD является внешним в треугольнике FAB и равен



$$180^\circ - \angle ABC = 2\angle FBA.$$

Пусть прямые FE и BC пересекаются в точке T. Тогда треугольники FAE и TCE подобны, и $AF/CT = AE/CE$. По свойству биссектрисы $AE/CE = AB/BC$. Следовательно, $AF/CT = AB/BC = AF/BC$, откуда $BC = CT$. Значит, $CM \parallel ET$ как средняя линия треугольника BET.

3. О т в е т: $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

О ц е н к а. Докажем, что сумма выписанных чисел не превосходит $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ методом математической индукции. Для $n = 2$ это очевидно.

Пусть утверждение верно для $n = k$, докажем его для $n = k+1$. Удалим из исходного набора $a_1 < a_2 < \ldots < a_{k+1}$ самое большое число a_{k+1}. Для остальных чисел выполняется индукционное предположение, т. е. сумма выписанных чисел для оставшегося набора не больше $\frac{(k-1)k(k+1)}{6}$. Для каждого натурального $t \leqslant k$ на число a_t может делиться не более чем $k+1-t$ сумм $a_{k+1} + a_i$, поскольку если для каких-то $i < j \leqslant t$ суммы $a_{k+1} + a_i$ и $a_{k+1} + a_j$ делятся на a_t, то и их разность $a_j - a_i$ делится на a_t, чего не может быть, так как это натуральное число меньше a_t. Что касается сумм вида $a_i + a_j$, делящихся на a_{k+1}, то поскольку $a_i + a_j < 2a_{k+1}$, делимость возможна только при $a_i + a_j = a_{k+1}$, а такие пары при выписывании чисел на доску не учитываются.

Следовательно, при добавлении числа a_{k+1} на доску будут дописаны числа, сумма которых не превосходит $\sum\limits_{i=1}^{k}(k+1-i) = \frac{k(k+1)}{2}$, и тогда общая сумма будет не больше $\frac{(k-1)k(k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$.

Пример: 1, 2, 4, …, 2^{n-1}. Нетрудно проверить, что каждая следующая степень двойки добавляет ровно столько пар, сколько было указано в оценке. Следовательно, пример подходит.

4. Ответ: да.

Давайте поселим жильцов так, чтобы сумма количества пар соседей-лжецов и удвоенного количества пар соседей-рыцарей была минимальна, а среди всех рассадок, для которых достигается этот минимум, выберем ту, в которой количество пар соседей-рыцарей было максимально. Предположим, что при такой рассадке условие задачи не выполняется. Разберем два случая:

1) Нашелся лжец, который говорит правду. Пусть у него ℓ соседей-лжецов и k соседей-рыцарей, тогда $\ell \geqslant 2k$. Попробуем вместо этого лжеца поселить рыцаря. Тогда количество пар соседей-лжецов уменьшится на ℓ, удвоенное количество пар соседей-рыцарей увеличится на $2k$, и в силу неравенства $\ell \geqslant 2k$ сумма этих количеств не увеличится. Но при этом увеличится количество пар соседей-рыцарей. Следовательно, изначально мы выбрали не оптимальную рассадку. Противоречие.

2) Нашелся рыцарь, который лжет. Пусть у него ℓ соседей-лжецов и k соседей-рыцарей, $\ell < 2k$. Аналогично попробуем заменить этого рыцаря на лжеца. Тогда количество пар соседей-лжецов увеличится на ℓ, удвоенное количество пар соседей-рыцарей уменьшится на $2k$, и в силу неравенства $\ell < 2k$ сумма этих количеств уменьшится. Снова противоречие с выбором оптимальной рассадки.

Таким образом, в выбранной нами рассадке все условия выполняются.