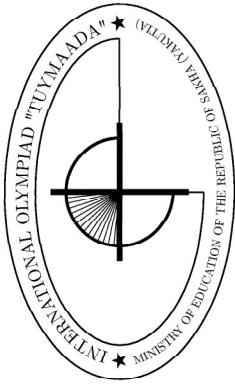


Министерство образования Республики Саха (Якутия)  
Малая академия наук Республики Саха (Якутия)  
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике  
Министерства образования Республики Саха (Якутия)  
и Северо-восточного федерального университета им. М.К. Аммосова.  
Телефон: (4112) 496862.  
E-mail: achudn@mail.ru, grigyun@yandex.ru.

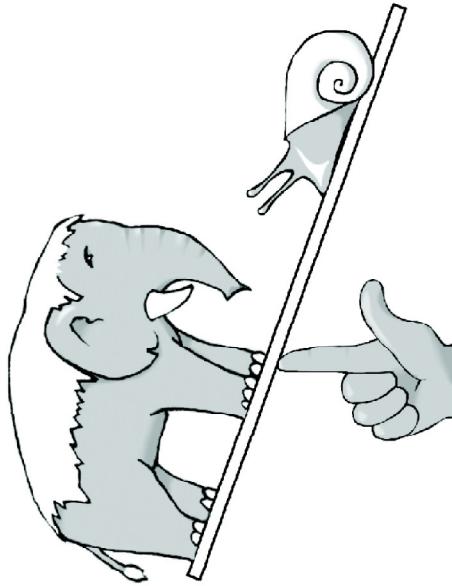
## XXVIII Международная олимпиада «Туймаада»



### Физика

### Теоретический тур

Методическое пособие



Общая редакция — Чудновский А. В.  
Перевод — Боякин Е. Ф.  
Оформление и вёрстка — Чудновский А. В.  
Коррекция — Боякин Е. Ф.  
Ответственный за комплект задач — Григорьев Ю. М.

При подготовке оригинал-макета  
использовалась издательская система L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>.  
© Авторский коллектив  
Подписано в печать 28.07.2021 в 16:47.  
677016, г. Якутск, ул. Белинского, д. 58  
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

## XXVIII Международная олимпиада «Түймаада»

Ежегодно в июле в столице Республики Саха (Якутия) — городе Якутск — проходит Международная олимпиада школьников «Түймаада» по физике, математике, информатике и химии. Олимпиаду организует Министерство образования РС (Я) и Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова на базе физико-математического форума «Ленский край». В разные годы в олимпиаде принимали участие школьники из Азербайджана, Бельгии, Болгарии, Германии, Казахстана, Китая, Киргизстана, Мексики, Монголии, Румынии, США, Тайланда, Турции, Франции, Южной Кореи и, конечно, из разных регионов России, включая Москву, Санкт-Петербург, Челябинск и другие города. Также в «Түймааде» регулярно участвуют члены сборной России и призёры заключительного этапа Всероссийских олимпиад. Согласно действующему положению олимпиада по физике включает в себя две лиги: старшую и младшую. В старшей лиге принимают участие учащиеся выпускного и предвыпускного классов, а в младшей — все остальные школьники. Задачи старшей лиги по программе и сложности соответствуют Международной физической олимпиаде, а задачи младшей лиги — 9 классу Всероссийской олимпиады. В каждой лиге проводятся два тура: теоретический и экспериментальный.

### Задача 1. Мито букашки

Массивная гладкая плита летит в вакууме вдаль от звёзд и планет со скоростью  $v$ , направленной под углом  $\varphi = 30^\circ$  к перпендикуляру к плите (рис. 1). По плите ползёт букашка в скафандре  $B$  со скоростью  $v$  относительно плиты. Лёгкий упругий шарик  $A$  лежит со скрепкой  $v_0 = v\sqrt{3}$  вдоль перпендикуляра к плите. В некоторый момент времени шарик был на расстоянии  $L\sqrt{3}$  от плиты, а букашка — на расстоянии  $2L$  от основания перпендикуляра, опущенного к плите из положения шарика. Скорости всех трёх тел и отрезок  $AB$  лежат в плоскости рисунка. На каком минимальном расстоянии  $S$  пролетит шарик от букашки в скафандре?

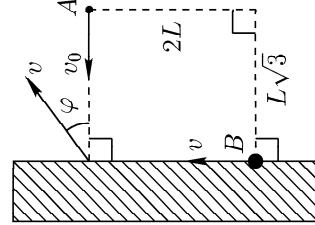


Рис. 1

## XXVIII International olympiad "Түймаада"

Every year in July in the capital of the Republic of Sakha (Yakutia), the city Yakutsk, the International School Physics, Mathematics, Informatics and Chemistry Olympiad «Түймаада» takes place. The Olympiad is organized by the Republic Sakha's (Yakutia) Department of Education and North-Eastern Federal University n.a. M.K. Ammosov on the base of the physico-mathematical forum «Lensky District». In different years students from Azerbaijan, Bulgaria, China, France, Germany, Kazakhstan, Kyrgyzstan, Mexico, Mongolia, Romania, South Korea, Thailand, Turkey, the USA and, of course, from different regions of Russia, including Moscow, Saint-Petersburg, Chelyabinsk and other cities, took part in the Olympiad. Also members of Russian national team and prizewinners of final stage of All-Russian Olympiads regularly participate in «Түймаада».

According to current regulations, Physics Olympiad includes two leagues: senior league and junior league. Students of graduation and pre-graduation classes participate in senior league, all the other school students — in junior one. Senior league problems correspond in program and difficulty to those of International Physics Olympiad, junior league problems — to those of 9th class of All-Russian Olympiad. In each league two rounds are held: theoretical one and experimental one.

## Младшая лига

Идет Международная олимпиада школьников «Түймаада» по физике, математике, информатике и химии. Олимпиаду организует Министерство образования РС (Я) и Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова на базе физико-математического форума «Ленский край». В разные годы в олимпиаде принимали участие школьники из Азербайджана, Бельгии, Болгарии, Германии, Казахстана, Китая, Киргизстана, Мексики, Монголии, Румынии, США, Тайланда, Турции, Франции, Южной Кореи и, конечно, из разных регионов России, включая Москву, Санкт-Петербург, Челябинск и другие города. Также в «Түймааде» регулярно участвуют члены сборной России и призёры заключительного этапа Всероссийских олимпиад. Согласно действующему положению олимпиада по физике включает в себя две лиги: старшую и младшую. В старшей лиге принимают участие учащиеся выпускного и предвыпускного классов, а в младшей — все остальные школьники. Задачи старшей лиги по программе и сложности соответствуют Международной физической олимпиаде, а задачи младшей лиги — 9 классу Всероссийской олимпиады. В каждой лиге проводятся два тура: теоретический и экспериментальный.

### Задача 2. Два клина

На гладкой горизонтальной плоскости находятся клинья массами  $m_1$  и  $m_2$ , имеющие плоский переход между их наклонной поверхностью и горизонтальной плоскостью (рис. 2). На клине  $m_1$  на высоте  $H$  над плоскостью находится маленький гладкий шарик массой  $m$ . Шарик отпускают, а после того как он соскальзывает с клина  $m_1$ , этот клин убирают с плоскости. На какой максимальной высоте  $h$  окажется шарик на клине  $m_2$ ? До каких максимальных скоростей  $v_1$  и  $v_2$  разгонится клин  $m_2$ ?

Рис. 2

### Задача 3. Прыгучая кошка

1. Кошка хочет перепрыгнуть с одной полки на другую, а затем обратно. Известны минимальные начальные скорости  $v_1$  и  $v_2$  кошки, при которых она сможет осуществить эти прыжки. Найдите модуль разности высот  $H$  и расстояния  $R$  между полками.

2. Кошка массой  $m$  прыгает по полкам  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в указанном порядке ( $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n$ ), останавливаясь после каждого прыжка. Разность высот между последней и первой полками равна  $\Delta H$ , а длина ломаной  $A_1A_2\dots A_n$  равна  $L$ . Чему равна минимальная энергия, необходимая кошке для всей серии прыжков? Считайте, что при прыжке КПД кошки равен 100%, а при прыжении она энергию не затрачивает.

Кошку и все полки считайте материальными точками, сопротивление воздуха не учитывайте, ускорение свободного падения  $g$  известно.

**Задача 4. Рычаги на рычаге**

На горизонтальной плоскости стоит кубик, на котором лежит невесомый рычаг, на котором стоят два невесомых кубика, на которых лежат невесомые рычаги, на концах которых закреплены маленькие грузики массами  $M$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m$  (рис. 3). Все три рычага расположены в одной вертикальной плоскости, параллельной паре граней каждого кубика и совпадающей с плоскостью рисунка. Для отсчёта длин по рисунку все три рычага разделены попечными метками на равные отрезки. При каких значениях массы  $m$  возможно равновесие, если масса  $M = 40$  г задана, а массы  $m_1$  и  $m_2$  можно брать любые? В качестве ответа укажите, сколько среди найденных вами значений массы  $m$  выражаются целым числом граммов.

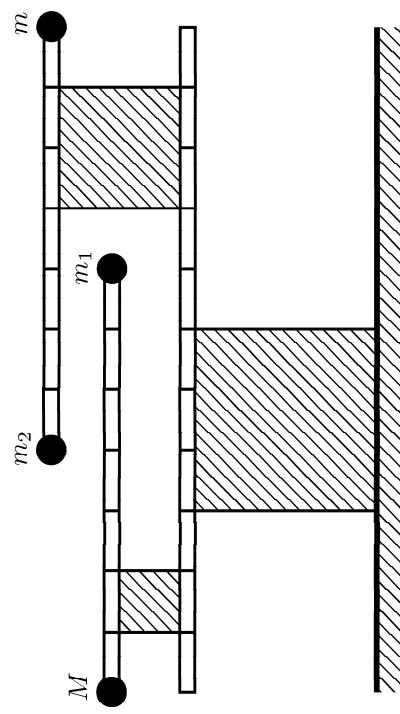


Рис. 3

**Задача 5. Проволочный многоготольник**

Все стороны и диагонали правильного 2020-угольника изготавлили из нескольких видов проволоки, материалы и сечения которых были выбраны таким образом, чтобы сопротивление каждой стороны и каждой диагонали оказалось равно  $R = 50$  Ом. В каждой вершине обеспечили хороший электрический контакт между всеми отрезками проволоки, а в каждой точке пересечения диагоналей (кроме вершин) изолировали все отрезки проволоки друг от друга. Найдите сопротивление  $R_0$  между двумя соседними вершинами проволочного многоготольника. Выразите искомую величину в единицах «МОм» и укажите в качестве ответа её численное значение, округлённое до трёх значащих цифр.

**Задача 6. Переохлаждённая вода**

В теплоизолированном сосуде находилась переохлаждённая вода массой  $M$  при нормальном давлении и температуре ниже  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . В систему внесли очень маленький кусочек льда, ставший центром кристаллизации. При какой наибольшей начальной температуре  $t_{\max}$  замёрзнет вся вода? Найдите массу  $m$  образовавшегося льда, если начальная температура  $t$  выше  $t_{\max}$ . Удельную теплёмость воды  $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C})$  считайте не зависящей от температуры, удельная теплота кристаллизации воды при нормальном давлении и температуре  $t_0$  равна  $\lambda = 330 \text{ кДж}/\text{кг}$ .

**Задача 7. Зеркальная Земля**

В начальный момент времени МКС (Международная космическая станция), летящая по круговой орбите вокруг Земли на высоте  $H = 400$  км над её поверхностью, пересекала отрезок, соединяющий центры Земли и Солнца, а непосредственно под МКС космонавты могли сквозь чистое небо наблюдать полный штиль на большой области Тихого океана. Через какое время  $T$  изображение Солнца в океане будет приближаться к МКС со скоростью  $u = 0,4 \text{ км}/\text{с}$ ? На каком расстоянии  $L$  от МКС будет изображение в этот момент времени? Землю считайте шаром радиусом  $R = 6400$  км, ускорение свободного падения на поверхности Земли  $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$ .

## Старшая лига

### Задача 1. Прыгучая кошка

1. Кошка хочет перепрыгнуть с одной полки на другую, а затем обратно. Известны минимальные начальные скорости  $v_1$  и  $v_2$  кошки, при которых она сможет осуществить эти прыжки. Найдите модуль разности высот  $H$  и расстояния  $R$  между полками.

2. Кошка массой  $m$  прыгает по полкам  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в указанном порядке ( $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n$ ), останавливаясь после каждого прыжка. Разность высот между последней и первой полками равна  $\Delta H$ , а длина ломаной  $A_1A_2\dots A_n$  равна  $L$ . Чему равна минимальная энергия, необходимая кошке для всей серии прыжков? Считайте, что при прыжке КПД кошки равен 100%, а при прыжении она энергию не затрачивает.

Кошка и все полки считайте материальными точками, сопротивление воздуха не учитывайте, ускорение свободного падения  $g$  известно.

### Задача 2. Рычаги на рычаге

На горизонтальной плоскости стоит кубик, на котором лежит невесомый рычаг, на концах которых закреплены маленькие грузики массами  $M, m_1, m_2$  и  $m$  (рис. 4). Все три рычага расположены в одной вертикальной плоскости, параллельной паре граней каждого кубика и совпадающей с плоскостью рисунка. Для отсчета длин по рисунку все три рычага разделены попечечными метками на равные отрезки. При каких значениях массы  $m$  возможно равновесие, если масса  $M = 40$  г задана, а массы  $m_1$  и  $m_2$  можно брать любые? В качестве ответа укажите, сколько среди найденных вами значений массы  $m$  выражаются целым числом граммов.

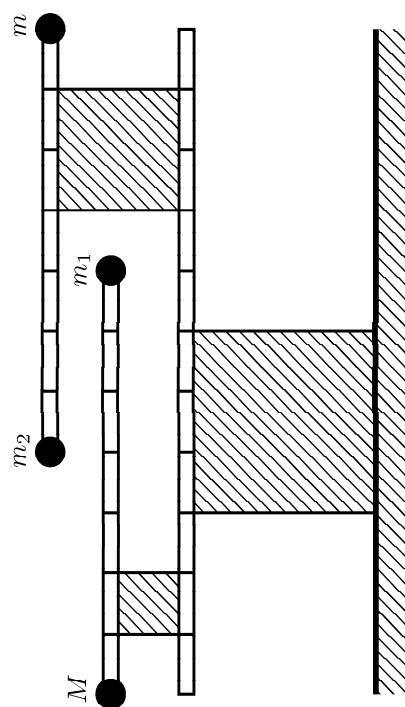


Рис. 4

### Задача 3. Осцилляторы

В этой задаче рассматриваются осцилляторы без диссилиации энергии (сил сопротивления нет, все удары абсолютно упругие). Считайте потенциальную энергию равной нулю в нижней точке траектории.

1. Вертикальный осциллятор Винтика представляет собой шарик, подпрыгивающий над упругой горизонтальной плоскостью. Найдите отношение  $k_1$  средней за период колебаний кинетической энергии такого осциллятора к полной энергии колебаний.

2. Параболический осциллятор Шпунтика представляет собой шарик, движущийся туда-сюда по одной и той же параболе между двумя симметричными упругими опорами, наклоненными под углом  $\varphi$  к горизонту (рис. 5). Найдите отношение  $k_2$  средней за период колебаний кинетической энергии такого осциллятора к полной энергии колебаний при  $\varphi = 45^\circ$ .

3. Незнайка решил сделать осциллятор Шпунтика «гармоническим», выбрав угол  $\varphi$  таким, чтобы средние за период колебаний кинетическая и потенциальная энергии шарика были одинаковы (как это было бы при настоящих гармонических колебаниях). При каком  $\varphi$  Незнайка сможет достичь цели?

### Задача 4. Переохлаждённая вода

В теплоизолированном сосуде находилась переохлаждённая вода массой  $M$  при нормальном давлении и температуре ниже  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . В систему внесли очень маленький кусочек льда, ставший центром кристаллизации. При какой наибольшей начальной температуре  $t_{\max}$  замёрзнет вся вода? Найдите массу  $m$  образовавшегося льда, если начальная температура  $t$  выше  $t_{\max}$ . Удельную теплоту выделения воды  $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$  считайте не зависящей от температуры, удельная теплота кристаллизации воды при нормальном давлении и температуре  $t_0$  равна  $\lambda = 330 \text{ кДж}/\text{кг}$ .

### Задача 5. Тройная смесь

В процессе изотермического сжатия смеси  $P$  трёх идеальных газов, взятых в равных количествах, давление смеси зависело от объема, как схематически (без соблюдения масштаба) показано на рис. 6. Используя указанные на графике численные значения, найдите отношение  $(P_1 + P_3)/P_2$ . В качестве ответа укажите искомую величину, округлённую до трёх цифр после запятой.



Рис. 6

**Задача 6. Заряд около конденсатора**

К уединённому незаряженному плоскому конденсатору ёмкостью  $C$  снаружи подносят точечный заряд  $q$ , располагая его рядом с центром ближайшей пластины вдали от её краёв.

1. Найдите напряжение  $U$  на конденсаторе.
2. Какую внешнюю силу  $F$  и в какую сторону нужно прикладывать к точечному заряду, чтобы удерживать его в покое относительно неподвижного конденсатора, если дополнительно известны расстояние  $d$  между пластинами и расстояние  $a$  между точечным зарядом и ближайшей к нему пластиной?

**Задача 7. Переменный накал**

Вольтамперная характеристика (ВАХ) некоторой лампы накаливания определяется формулой

$$|I| = a \left( \sqrt{\frac{|U|}{b}} + 1 - 1 \right),$$

где  $b = 15$  В и  $a$  — константы, причём отличие данной ВАХ от прямой пропорциональности связано только с зависимостью сопротивления от температуры. Лампу подключают к источнику переменного напряжения  $U = U_0 \sin \omega t$  с амплитудой  $U_0 = 115$  В и такой большой циклической частотой  $\omega$ , что изменением температуры нити накаливания лампы за один период колебаний напряжения можно пренебречь. Найдите отношение амплитуды колебаний силы тока через нескольких первых периодов к амплитуде колебаний силы тока через продолжительное время. В качестве ответа укажите искомую величину, округлённую до трёх цифр после запятой.

**Задача 8. Зеркальная Земля**

В начальный момент времени МКС (Международная космическая станция), летящая по круговой орбите вокруг Земли на высоте  $H = 400$  км над её поверхностью, пересекала отрезок, соединяющий центры Земли и Солнца, а непосредственно под МКС космонавты могли сквозь чистое небо наблюдать полный птиц на большой области Тихого океана. Через какое время  $T$  изображение Солнца в океане будет приближаться к МКС со скоростью  $u = 0,4$  км/с? На каком расстоянии  $L$  от МКС будет изображение в этот момент времени? Землю считайте шаром радиусом  $R = 6400$  км, ускорение свободного падения на поверхности Земли  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Возможные решения****Младшая лига****Задача 1. Мимо букашки**

В системе отсчёта букашки шарик будет иметь следующие составляющие вектора скорости (рис. 7):

$$u_x = v_0 + v \cos \varphi = \frac{3}{2}v\sqrt{3},$$

$$u_y = v + v \sin \varphi = \frac{3}{2}v.$$

Скорость плиты направлена вдоль её поверхности, но из-за отсутствия трения это никак не влияет на отражение шарика при абсолютно упругом ударе. Искомое минимальное расстояние  $S$  — это длина перпендикуляра  $BE$  к лучу  $DE$ , вдоль которого летит шарик после отскока от плиты в точке  $D$ . Из закона отражения и рассмотрения прямоугольных треугольников  $ADC$  и  $BDE$  следует равенство углов  $\angle DAC' = \angle DBE$ , которое позволяет получить ответ:

$$\begin{aligned} S &= BD \cdot \cos \angle DBE = (CB - CD) \cdot \cos \angle DAC = \\ &= (CB - CA \cdot \operatorname{tg} \angle DAC) \cdot \cos \angle DAC = \\ &= \left( 2L - L\sqrt{3} \cdot \frac{u_y}{u_x} \right) \cdot \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} L \approx 0,866L. \end{aligned}$$

**Задача 2. Два клина**

Пусть  $u_1$  и  $v_0$  — скорости соответственно клина  $m_1$  и шарика сразу после его соскальзывания, тогда законы сохранения импульса и энергии имеют вид

$$m_1 u_1 = m v_0,$$

$$m g H = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m v_0^2}{2},$$

откуда получаем выражение

$$v_0 = \sqrt{\frac{2m_1 g H}{m + m_1}}.$$

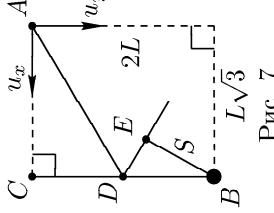


Рис. 7

1. Когда шарик достигнет наивысшей точки на клине  $m_2$ , он остановится относительно клина, поэтому из закона сохранения импульса выразим общую скорость  $v_1$  клина и шарика:

$$v_1 = \frac{mv_0}{m + m_2}.$$

Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m+m_2)v_1^2}{2} + mgh$$

найдём искомую высоту:

$$h = \frac{m_2 v_0^2}{2(m+m_2)g} = \frac{m_1 m_2 H}{(m+m_1)(m+m_2)}.$$

**Примечание.** Если записать последнее выражение в виде

$$h = \frac{m_1}{m+m_1} \cdot \frac{m_2}{m+m_2} \cdot H,$$

то становится видно, что первая дробь — это КПД преобразования потенциальной энергии шарика в кинетическую при съезде с первого клина, а вторая дробь — это КПД преобразования кинетической энергии шарика в потенциальную при заезде на второй клин. Предлагаем читателям самостоятельно подумать о применимости этой идеи при решении задачи, в которой первый клин оставил бы на плоскости, допуская тем самым неоднократные взаимодействия шарика с клиньями.

2. Клин  $m_2$  будет иметь максимальную скорость, когда шарик соскользнёт с него. Пусть  $u_2$  — направлена от клина  $m_2$  скорость шарика после соскальзывания с клина, тогда законы сохранения импульса и энергии имеют вид

$$mv_0 = -mu_2 + m_2 v_2,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mu_2^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

откуда находим искомую скорость:

$$v_2 = \frac{2mv_0}{m+m_2} = \frac{2m}{m+m_2} \sqrt{\frac{2m_1 g H}{m+m_1}}.$$

### Задача 3. Прыгучая кошка

Введём систему координат с началом в полке  $A$ , ось  $y$  направим вверх, а ось  $x$  — вдоль проекции радиус-вектора полки  $B$  на горизонтальный плоскость. Пусть  $v_0$  — начальная скорость кошки, прыгающей с полки  $A$  на полку  $B$ ,  $t$  — время полёта кошки, тогда для координат  $x$  и  $y$  полки  $B$  можно записать уравнения

$$x = v_{0x} t, \quad y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2},$$

откуда выражаем проекции начальной скорости:

$$v_{0x} = \frac{x}{t}, \quad v_{0y} = \frac{y}{t} + \frac{gt}{2}.$$

Используя теорему Пифагора для скоростей ( $v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$ ) и для координат ( $R^2 = x^2 + y^2$ ), получим выражение

$$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = \frac{x^2 + y^2}{t^2} + gy + \frac{g^2 t^2}{4} = gy + \frac{gR}{2} \left( \frac{2R}{gt^2} + \frac{gt^2}{2R} \right).$$

Известно, что сумма двух положительных обратных друг другу величин достигает минимального значения, равного 2, когда каждая из величин равна 1, что можно доказать через производную или через выделение полного квадрата:

$$f(z) = z + \frac{1}{z} = \left( \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 + 2.$$

Таким образом, для минимальной начальной скорости справедлива формула

$$v_{0\min}^2 = gy + \frac{gR}{2} \cdot 2 = g(R+y). \quad (1)$$

1. Применяя полученный общий результат к двум прыжкам кошки из первого пункта задачи, получаем уравнения

$$v_1^2 = g(R+y), \quad v_2^2 = g(R-y), \quad H = |y|,$$

из которых находим искомые величины:

$$R = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2g}, \quad H = \frac{|v_1^2 - v_2^2|}{2g}.$$

2. С помощью формулы (1) найдём минимальную энергию, необходимую кошке на первый прыжок:

$$E_{1\min} = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mg}{2}(L_1 + \Delta H_1),$$

где  $L_1$  и  $\Delta H_1$  — расстояние и разность высот между полками  $A_1$  и  $A_2$ . Суммируя аналогичные выражения для всех прыжков, получаем ответ:

$$E_{\min} = \frac{mg}{2}(L + \Delta H).$$

#### Задача 4. Рычаги на рычаге

Для записи условий равновесия необходимо найти точки приложения сил реакции опоры, действующих со стороны кубиков на опирающиеся на них рычаги. Равновесие возможно при условии  $m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$  (граничные значения ещё предстоит найти), при чём в случае  $m = m_{\min}$  нижний рычаг балансирует, опираясь на точку А, а при  $m = m_{\max}$  — на точку В (рис. 8).

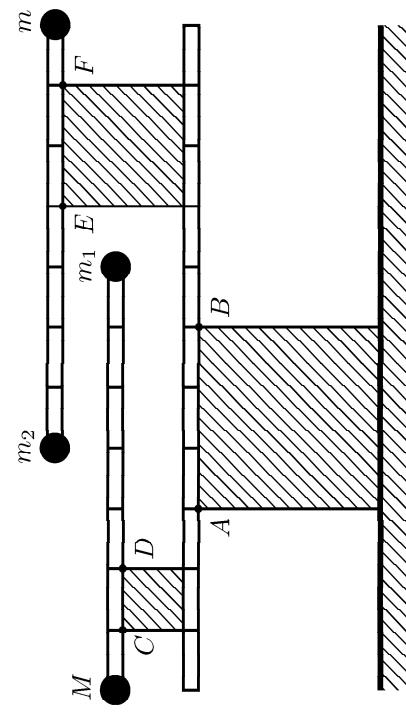


Рис. 8

Пусть  $L$  — расстояние между соседними метками на рычагах, тогда условие равновесия нижнего рычага в случае  $m = m_{\min}$  (уравнение моментов относительно полюса А) имеет вид

$$Mg \cdot 3L = m_2 g \cdot L + m_1 g \cdot 4L + m_{\min} g \cdot 8L, \quad (2)$$

откуда после упрощения получаем выражение

$$m_{\min} = \frac{3M - m_2 - 4m_1}{8}. \quad (3)$$

**Примечание.** Обратите внимание, что знак момента силы (сторона равенства (2), где он записан) зависит от того, с какой стороны от полюса А проходит линия действия силы, но не зависит от того, к какому из верхних рычагов прикреплён груз. Например, момент силы  $m_1 g$  записан в правой части равенства, хотя груз  $m_1$  прикреплён к рычагу, опирающемуся на левый кубик. Выражение (3) показывает, что для достижения минимально возможного значения  $m_{\min}$  нужно взять максимальные  $m_1$  и  $m_2$ . При максимальном значении  $m_1$  левый верхний рычаг будет балансирует, опираясь на точку  $D$ , поэтому его условие равновесия будет иметь вид

$$\begin{aligned} Mg \cdot 6L &= m_1 g \cdot 6L, & \text{откуда} & m_1 = \frac{1}{6}M. \\ m_{\max} &= \frac{6M + 2m_2 - m_1}{5}. & & \end{aligned} \quad (6)$$

Это выражение показывает, что для достижения максимально возможного значения  $m_{\max}$  нужно взять минимальное  $m_1$  и максимальное  $m_2$ . При минимальном значении  $m_1$  левый верхний рычаг будет балансирует, опираясь на точку  $C$ , поэтому его условие равновесия будет иметь вид

$$\begin{aligned} Mg \cdot L &= m_1 g \cdot 6L, & \text{откуда} & m_1 = \frac{1}{6}M. \\ m_{\max} &= \frac{6M + 2m_2 - m_1}{5}. & & \end{aligned} \quad (7)$$

При максимальном значении  $m_2$  правый верхний рычаг будет балансирует, опираясь на точку  $E$ , поэтому его условие равновесия будет иметь вид

$$m_2 g \cdot 4L = m_{\max} g \cdot 3L, \quad \text{откуда} \quad m_2 = \frac{3}{4}m_{\max}. \quad (8)$$

**Примечание.** Любопытно, что формулы (5) и (8) по сути совпадают, хотя аналогичные им формулы (4) и (7) различаются. Различие кажется естественным, так как в одном случае мы ищем минимум, а в другом — максимум, то есть в одном случае система почти падает вправо, но вот совпадение настораживает. Сомнения рассеиваются, если заметить, что линия действия силы  $m_2 g$  проходит между точками  $A$  и  $B$ , то есть вместе с изменением направления «почти падения» меняется знак момента силы  $m_2 g$ , так что два изменения знака нейтрализуют друг друга.

После подстановки формулы (7) и (8) в выражение (6) получаем уравнение, из которого находим искомую нижнюю границу:

$$m_{\max} = \frac{5}{3}M. \quad (4)$$

Таким образом, равновесие возможно при условии

$$m \in [n_{\min}; n_{\max}] = \left[ \frac{4}{25}M; \frac{5}{3}M \right] \approx [6,4; 66,7] \text{ г.}$$

Ни одна из границ диапазона не равна целому числу граммов, поэтому нет подвода для сомнений, учитывать ли граничное значение. В диапазоне от 6,4 до 66,7 лежат целые числа от 7 до 66 включительно, количество которых равно 60, что и является окончательным ответом.

### Задача 5. Проволочный многоугольник

Все стороны и все диагонали многоугольника вместе образуют систему отрезков, соединяющих каждую пару вершин, то есть вместо 2020-угольника можно рассматривать систему из  $N = 2020$  точек, любые две из которых соединены резистором сопротивлением  $R$ . Среди этих точек есть две особенные — это точки  $A_1$  и  $A_2$ , между которыми измеряется сопротивление, а все остальные точки ( $A_3, A_4, \dots, A_{2020}$ ) эквивалентны друг другу, так как каждая из них подходит под одно и то же описание: она соединена резисторами сопротивлением  $R$  с двумя особенностями точками и с  $(N - 3)$  остальными точками (заметим, что особенные точки под это описание не подходят, так как каждая из них соединена резистором лишь с одной особенной точкой, а не с двумя).

Эта логическая симметрия означает, что все не особенные точки будут иметь равные потенциалы, а значит, через резисторы, соединяющие эти точки, ток течь не будет и эти резисторы можно просто выкинуть. На эквивалентной схеме (рис. 9) отсутствуют отрезки между всеми не особенными точками, а каждый отрезок с обозначенными концами имеет сопротивление  $R$ .

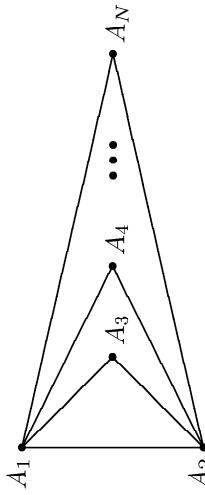


Рис. 9

Особенные точки  $A_1$  и  $A_2$  соединены между собой одним путём сопротивлением  $R$  и  $(N - 2)$  путями сопротивлением  $2R$  каждый, поэтому искомое общее сопротивление найдём по свойствам параллельного соединения резисторов:

$$R_0 = \frac{1}{\frac{N-2}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{2R}{N} = \frac{R}{1010} \approx 49,5 \text{ мОм.}$$

### Задача 6. Переохлаждённая вода

Начнём с вопроса про  $m$ , так как ответ на него позволит сразу найти  $t_{\max}$ . Для упрощения рассуждений подведём к воде количество теплоты  $Q$

$$Q = cM(t_0 - t),$$

чтобы нагреть воду до температуры  $t_0$ , при которой нам известна удельная теплота кристаллизации, а затем отведём то же самое количество теплоты  $Q$  (для соблюдения условия о теплоизолированности сосуда), в результате чего при той же температуре  $t_0$  в лёд превратится в воду массой

$$m = \frac{Q}{\lambda} = \frac{cM(t_0 - t)}{\lambda}.$$

При температуре  $t_{\max}$  в лёд превратится вся вода, поэтому из уравнения

$$M = \frac{cM(t_0 - t_{\max})}{\lambda}$$

находим искомое значение:

$$t_{\max} = t_0 - \frac{\lambda}{c} \approx -78,6^\circ\text{C}.$$

### Задача 7. Зеркальная Земля

Пусть  $m$  и  $v$  — соответственно масса и скорость МКС, тогда её центростремительное ускорение при движении по орбите равно  $a_\perp = v^2/(R + H)$ , а второй закон Ньютона для МКС имеет вид

$$m \cdot \frac{v^2}{R + H} = mg \cdot \left( \frac{R}{R + H} \right)^2,$$

где учтено, что согласно закону всемирного тяготения сила тяжести обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра Земли, и откуда получаем соотношение

$$v^2 = \frac{gR^2}{R + H}. \quad (9)$$

Предположим (а в конце проверим), что к искому моменту времени МКС сместился вдоль достаточно малой дуги  $ABC$  (рис. 10), чтобы в растёгах можно было пользоваться приближениями для малых углов. Отрезок  $SE$ , соединяющий центры Солнца и Земли, будем считать неподвижным, так как угловая скорость обращения Земли вокруг Солнца много меньше угловой скорости обращения МКС вокруг Земли. Наличие более одной боквы  $S$  на рисунке иллюстрирует тот факт, что Солнце в нашей модели — это огромная точка (дуга слева — это лишь край этой точки) на бесконечном расстоянии. Отметим,

что суточное вращение Земли не играет вообще никакой роли, так как вращение шара вокруг оси, проходящей через его центр, не приводит ни к каким изменениям (по условию зеркальная область океана большая, то есть супа далеко и не успеет заменить собой воду в точке отражения лучей).

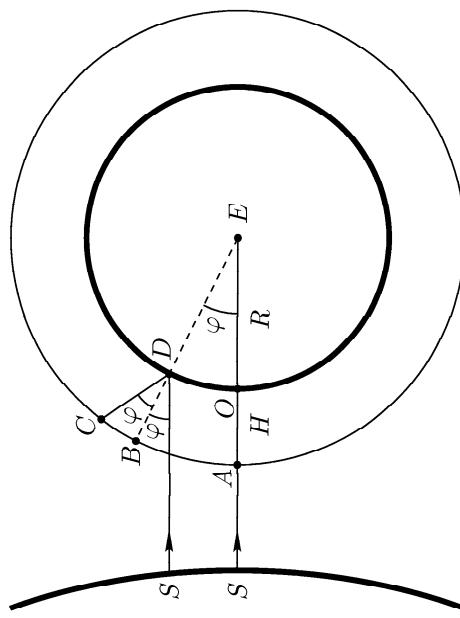


Рис. 10

Обозначим через  $\varphi$  равные между собой углы падения и отражения ( $\angle SDB$  и  $\angle BDC'$ ), а также равный им (как соответственный) угол  $\angle SED$ , и выразим через угол  $\varphi$  путь, пройденный МКС к исковому моменту времени:

$$vT = \cup AB + \cup BC = \varphi(R + H) + \varphi H = (R + 2H)\varphi,$$

где при расчёте длины второй дуги было использовано приближение  $\varphi \ll 1$  и откуда получаем соотношение

$$\varphi = \frac{vT}{R + 2H}. \quad (10)$$

Чтобы найти положение изображения Солнца на прямой  $DC$ , нужно построить очень близкий к  $SD$  второй луч  $SF$  (рис. 11). Жирные чёрточки в точках  $D$  и  $F$  — это касательные к поверхности воды в этих точках, то есть маленькие плоские зеркала. Сами зеркала образуют между собой угол  $\delta$ , поэтому угол между отражёнными от них лучами будет  $2\delta$ . Будем считать, что угол бесконечно мал, тогда расстояние между зеркалами найдётся как длина дуги  $DF = R\delta$  (рис. 12), а его проекция на общий перпендикуляр к прямым  $PD$  и  $PF$  (в силу малости  $\delta$  их можно считать почти параллельными) имеет вид  $DK = DF \cos \angle FDK = R\delta \cos \varphi$ , так как по теореме об углах с соответственно перпендикулярными сторонами верно равенство  $\angle FDK = \angle BDC = \varphi$ . Считая отрезок  $DK$  дугой окружности с центром в точке  $P$ , выразим его длину в виде  $DK = DP \cdot 2\delta$ . Приравнивая два выражения для  $DK$ , находим расстояние

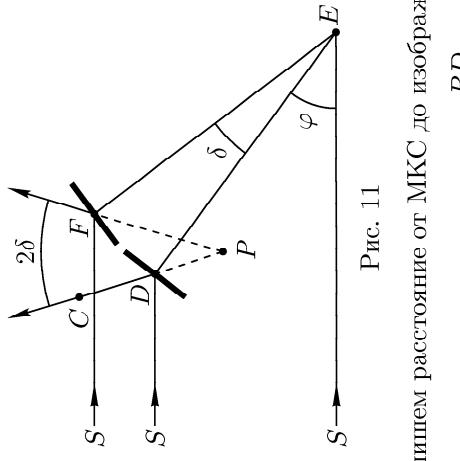


Рис. 11

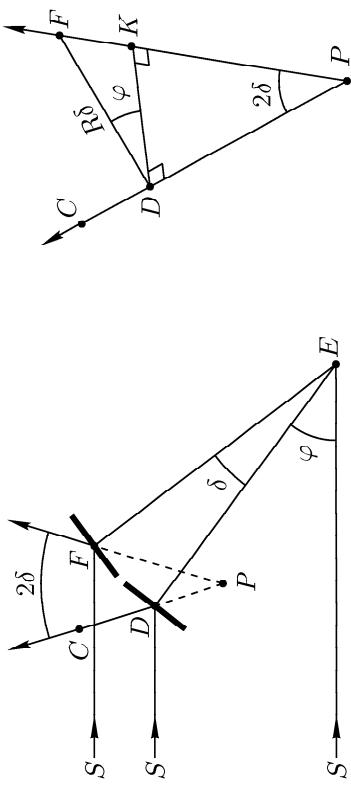


Рис. 12

Запишем расстояние от МКС до изображения Солнца в океане:

$$x = CP = CD + DP = \frac{BD}{\cos \varphi} + DP = \frac{H}{\cos \varphi} + \frac{R \cos \varphi}{2}.$$

Используя приближения  $\cos y \approx 1 - y^2/2$  и  $1/(1+y) \approx 1-y$ , справедливые при  $y \ll 1$ , преобразуем полученное выше выражение:

$$x \approx H \left( 1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) + \frac{R}{2} \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) = \left( \frac{R}{2} + H \right) - \left( \frac{R}{2} - H \right) \frac{\varphi^2}{2}. \quad (11)$$

После подстановки формул (10) и (9) в (11) получаем зависимость

$$x = \left( \frac{R}{2} + H \right) - \frac{gR^2(R-2H)}{2(R+H)(R+2H)^2} \cdot \frac{T^2}{2},$$

которая соответствует равноускоренному приближению с ускорением

$$a = \frac{gR^2(R-2H)}{2(R+H)(R+2H)^2}.$$

Из выражения  $u = aT$  для скорости приближения изображения к МКС получаем окончательный ответ:

$$T = \frac{2u(R+H)(R+2H)^2}{gR^2(R-2H)} \approx 123 \text{ с.}$$

С помощью формул (9) и (10) можно убедиться, что изначальное предположение  $\varphi \ll 1$  выполнено. В пределах той же точности искомое расстояние можно найти в виде

$$L = x(T) \approx x(0) = \frac{R}{2} + H = 3600 \text{ км.}$$

**Примечание.** Если заранее предвидеть, что значение  $T$  весьма мало (МКС не успеет значительно сместиться), то величину  $L$  можно было бы найти проще: заменить выпуклое сферическое зеркало радиусом  $R$  (океан) тонкой рассевиающей линзой с фокусным расстоянием  $-R/2$ , оптическим центром в точке  $O$  (рис. 10) и дополнительным отражением относительно плоскости линзы. Тогда параллельный лучок от Солнца создаст изображение в фокусе, совпадающим с серединой  $N$  отрезка  $OE$ , откуда сразу следует выражение

$$L = AN = AO + ON = H + \frac{R}{2}.$$

Однако найти  $T$ , считая изображение зафиксированным в точке  $N$  (на самом деле оно смещается, так как по мере движения МКС создаётся разными лучами), уже не получится, так как описанная выше эквивалентность выпуклого зеркала и рассеивающей линзы является приближённым утверждением, при выводе которого пренебрегали поправками того же порядка малости, что и рассматриваемый в задаче эффект. Если применить это некорректное приближение, то получится зависимость

$$x = \left(\frac{R}{2} + H\right) + \frac{gR^3}{(R+2H)(R+H)^2} \cdot \frac{T^2}{2},$$

из которой следует, что изображение удаляется от МКС, то есть получается даже другой знак эффекта.

## Старшая лига

### Задача 1. Прыгучая кошка

См. зад. 3 млад. лиги.

### Задача 2. Рычаги на рычаге

См. зад. 4 млад. лиги.

### Задача 3. Осицилляторы

Чтобы ответить сразу на все три вопроса задачи, рассмотрим параболический осциллятор Шпунтика в общем случае (с произвольным углом  $\varphi$ ). Шарик движется туда-сюда по одной и той же параболе, значит, по закону отражения при каждом ударе шарик падает и отскакивает вдоль перпендикуляра к опоре, то есть в этот момент его скорость направлена под углом  $\varphi$  к вертикали. Пусть  $m$  — масса шарика,  $v_0$  — его начальная скорость (сразу после удара об опору), тогда полная энергия  $W_0$  и кинетическая энергия  $E(t)$  в зависимости от времени  $t$  полёта шарика (до очередного удара) имеют вид:

$$W_0 = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{mv_0^2}{2} + 0 = \frac{mv_0^2}{2},$$

$$E(t) = \frac{m}{2} ((v_0 \sin \varphi)^2 + (v_0 \cos \varphi - gt)^2) = \frac{m}{2} (v_0^2 - 2gtv_0 \cos \varphi + g^2t^2).$$

Кинетическая энергия не зависит от направления скорости, поэтому средняя кинетическая энергия  $E_0$  будет одинаковой при усреднении за весь период  $T$ , за его половину и даже за его четверть — время движения от нижней до верхней точки траектории, которое найти проще всего:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{v_0 \cos \varphi}{g}.$$

Усредним кинетическую энергию за это время:

$$E_0 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau E(t) dt = \frac{m}{2} \left( v_0^2 - g\tau v_0 \cos \varphi + \frac{1}{3}g^2\tau^2 \right) = \frac{mv_0^2}{2} \left( 1 - \frac{2}{3} \cos^2 \varphi \right).$$

**Примечание.** Если подставить  $\tau = T/2 = 2v_0 \cos \varphi / g$ , то получится тот же результат, но вот подстановка  $\tau = T = 4v_0 \cos \varphi / g$  приведёт к ошибке, так как использованная зависимость  $E(t)$  не учитывает изменение вектора скорости в момент удара и потому верна только при  $0 \leq t \leq T/2$ .

Выразим искомое отношение энергий:

$$k(\varphi) = \frac{E_0}{W_0} = 1 - \frac{2}{3} \cos^2 \varphi.$$

**Примечание.** Всегда полезно проверять результаты на здравый смысл и очевидные частные случаи: выражение для  $k(\varphi)$  при любых углах даёт разумные значения (положительные и не больше единицы), при чём  $k \approx 1$  логичным образом достигается при очень быстрых колебаниях между почти вертикальными стенками.

1. Вертикальный осциллятор Винтика — это параболический осциллятор. Шпунтика при  $\varphi = 0$ , поэтому первый ответ получаем подстановкой:

$$k_1 = k(0) = \frac{1}{3}.$$

2. Аналогичная подстановка даёт второй ответ:

$$k_2 = k(45^\circ) = \frac{2}{3}.$$

3. Если средние кинетическая и потенциальная энергии одинаковы, то каждая из них составляет половину от полной энергии, поэтому из уравнения

$$k(\varphi) = \frac{1}{2}$$

получаем третий ответ:  $\varphi = 30^\circ$ .

#### Задача 4. Переохлаждённая вода

См. зад. 6 м.л. лиги.

#### Задача 5. Тройная смесь

Точки излома на графике изотермы в координатах  $P(V)$  соответствуют моментам начала конденсации газа в процессе скатия, так как в эти моменты идеальный газ превращается в насыщенный пар и его давление перестаёт зависеть от объёма. Наличие ровно трёх точек излома означает, что в рассматриваемом процессе каждый из трёх газов смеси достиг своей точки насыщения. Зависимость давления насыщенного пара от температуры в данной задаче роли не играет, так как процесс изотермический. Пусть  $P_a$  — давление насыщенного пара того из газов смеси, который достиг насыщения первым (при объёме  $3V_0$ ),  $P_b$  — давление насыщенного вторым (при объёме  $2V_0$ ),  $P_c$  — давление насыщенного третьим (при объёме  $V_0$ ), пары того из газов смеси, который достиг насыщения третьим (при объёме  $V_0$ ), тогда система уравнений Менделеева–Кланейрона для всех газов в их точках насыщения будет иметь вид

$$\begin{cases} P_a \cdot 3V_0 = \nu RT, \\ P_b \cdot 2V_0 = \nu RT, \\ P_c \cdot V_0 = \nu RT, \end{cases}$$

где  $\nu$  — количество каждого из газов (одинаковое у всех),  $T$  — температура смеси,  $R$  — универсальная газовая постоянная. Для упрощения записи введём обозначение  $P_0 = \nu RT/(6V_0)$ , тогда уравнения системы примут вид

$$\begin{cases} P_a = 2P_0, \\ P_b = 3P_0, \\ P_c = 6P_0. \end{cases}$$

Запишем закон Дальтона о парциальных давлениях при объёмах  $V_0$ ,  $2V_0$  и  $3V_0$ , выразив неизвестные давления идеальных газов через давления насыщенных паров с использованием обратной пропорциональности объёму и подставив полученные выше формулы для давлений насыщенных паров:

$$\begin{cases} P_3 = P_a + P_b + P_c = 11P_0, \\ P_2 = P_a + P_b + P_c \cdot \frac{1}{2} = 8P_0, \\ P_1 = P_a + P_b \cdot \frac{2}{3} + P_c \cdot \frac{1}{3} = 6P_0. \end{cases}$$

Окончательный ответ имеет вид

$$\frac{P_1 + P_3}{P_2} = \frac{17}{8} = 2,125.$$

#### Задача 6. Заряд около конденсатора

Главное свойство проводников в электростатике: заряды распределяются по поверхности проводника так, чтобы поле в его толще отсутствовало.

При приближении точечного заряда  $q$  к правой пластине конденсатора (рис. 13) на её наружной поверхности индуцируется неравномерно распределённый заряд  $-q$ , который в области слева от этой поверхности полностью компенсирует поле точечного заряда. Поэтому точечный заряд  $q$  и этот неравномерно распределённый заряд  $-q$  можно исключить из рассмотрения.

После устранения индуцированного заряда  $-q$  правая пластина станет заряжена зарядом  $+q$ , который распределится равномерно: по  $+q/2$  на внутренней и наружной поверхностях, чтобы не возникло поля в толще правой пластины. Левая пластина остаётся незаряженной, но на ней должно произойти перераспределение заряда, чтобы компенсировать внутри неё внешнее поле, создаваемое суммарным зарядом  $+q$  на правой пластине, поэтому на левой пластине индуцируются заряды  $+q/2$  и  $-q/2$  соответственно на наружной и внутренней поверхностях (рис. 13).

Заряды  $+q/2$  на наружных поверхностях пластин не создают поля в области конденсатора, поэтому эти два заряда можно исключить из рассмотрения.

Рис. 13

Заряды  $+q/2$  на наружных поверхностях пластин не создают поля в области

Таким образом, остались только заряды  $-q/2$  и  $+q/2$  на внутренних поверхностях пластин, то есть конденсатор заряжен зарядом  $q/2$  до напряжения

$$U = \frac{q}{2C}.$$

Чтобы найти силу  $F$ , воспользуемся методом изображений: индуцированный на наружной поверхности правой обкладки неравномерно распределённый заряд  $-q$  создаёт в области справа от этой поверхности такое же поле, какое создавал бы точечный заряд  $-q$ , расположенный симметрично точночному заряду  $q$  относительно наружной обкладки правой пластины.

По закону Кулона находим направленную влево силу притяжения, действующую на точечный заряд со стороны индуцированного заряда  $-q$ :

$$F_1 = \frac{kq^2}{(2a)^2}.$$

Равномерно распределённый по правой пластине суммарный заряд  $+q$  отталкивает точечный заряд вправо с силой

$$F_2 = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} \cdot q = \frac{q^2}{2Cd},$$

где для нахождения площади  $S$  пластины была использована формула ёмкости плоского конденсатора  $C = \varepsilon_0 S/d$ .

Левая пластина не создаёт поле вне себя, поэтому искомая внешняя сила должна противодействовать лишь векторной сумме  $F_1$  и  $F_2$ :

$$F = F_1 - F_2 = q^2 \left( \frac{k}{4a^2} - \frac{1}{2Cd} \right).$$

В рамках использованной модели  $S \gg a^2$ , то есть  $F_1 \gg F_2$ , а потому сила  $F$  направлена от конденсатора.

### Задача 7. Переменный накал

За несколько первых колебаний нить накаливания лампы не успеет нагреться, поэтому её сопротивление будет таким же, как и при малых постоянных напряжениях. Выразим это сопротивление по закону Ома:

$$R_0 = \frac{\Delta U}{\Delta I},$$

где  $\Delta U$  и  $\Delta I$  — малое напряжение и соответствующая ему малая сила тока, связь между которыми найдём через производную ВАХ лампы при неограниченных подмодульных выражениях:

$$R_0 = \frac{dU}{dI} = \frac{1}{dI} = \frac{1}{I'(U)} = \frac{2b}{a} \sqrt{\frac{U}{b} + 1} = \frac{2b}{a},$$

$$(12)$$

$$I_1 = \frac{U_0}{R_0} = \frac{aU_0}{2b}.$$

Через промежуточное время нить накаливания лампы достигнет равновесной температуры, которую она имела бы при подключении лампы к источнику постоянного напряжения, равного действующему значению переменного напряжения, то есть в установившемся режиме формула для ВАХ будет связывать между собой действующие значения силы тока и напряжения:

$$(13)$$

$$I_{\text{дей}} = a \left( \sqrt{\frac{U_{\text{дей}}}{b}} + 1 - 1 \right).$$

Обозначим через  $I_2$  амплитуду колебаний силы тока через большое время и запишем формулы для действующих значений силы тока и напряжения, справедливые для случая синусоидальной зависимости от времени:

$$(14)$$

$$I_{\text{дей}} = \frac{I_2}{\sqrt{2}}, \quad U_{\text{дей}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Из формул (13) и (14) получаем выражение

$$(15)$$

$$I_2 = a\sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{U_0}{b\sqrt{2}}} + 1 - 1 \right).$$

Вспомнимая про формулу (12), находим окончательный ответ:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_0}{2b\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{U_0}{b\sqrt{2}}} + 1 - 1 \right)^{-1} \approx 1,767.$$

### Задача 8. Зеркальная Земля

См. зад. 7 МП. лиги.

## Junior league

### Problem 1. Past the insect

Massive smooth plate flies in a vacuum far from stars and planets with a velocity  $v$ , directed at an angle  $\varphi = 30^\circ$  to the perpendicular to the plate (fig. 14). An insect in a spacesuit  $B$  is crawling along with the plate at speed  $v$  relative to the plate. A light elastic ball  $A$  flies with a velocity  $v_0 = v\sqrt{3}$  along the perpendicular to the plate. At some moment, the ball was at a distance  $L\sqrt{3}$  from the plate, and the insect — at distance  $2L$  from the base of the perpendicular, which is lowered to the plate from the ball's position. The velocities of all three bodies and segment  $AB$  lie in the figure's plane. At which minimum distance  $S$  will the balloon fly from the insect in the spacesuit?

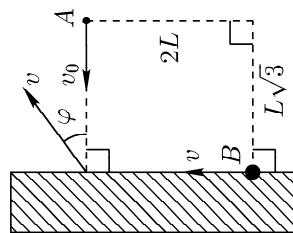


Fig. 14

### Problem 2. Two wedges

Wedges with masses  $m_1$  and  $m_2$ , rest on a smooth horizontal plane, having a smooth transition between their inclined surface and horizontal plane (fig. 15). On wedge  $m_1$  at height  $H$  above the plane, there is a small smooth ball of mass  $m$ . The ball is released, and after it slides off the  $m_1$  wedge, this wedge is removed from the plane. What maximum height  $h$  will reach the ball on wedge  $m_2$ ? To what maximum speed  $v_2$  will accelerate the wedge  $m_2$ ?

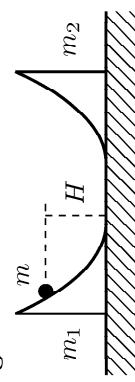


Fig. 15

### Problem 3. Jumping cat

- Cat wants to jump from one shelf to another and then back.  $v_1$  and  $v_2$  are known minimum initial cat's speeds, at which it can make these jumps. Find the modulus of heights difference  $H$  and the distance  $R$  between shelves.
- A cat with a mass  $m$  jumps on the shelves  $A_1, A_2, \dots, A_n$  with specified order ( $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n$ ), stopping after each jump. The height difference between the last and first shelves is  $\Delta H$ , and the polyline  $A_1 A_2 \dots A_n$  length is  $L$ . What is the minimum energy required for a cat to complete a series of jumps? Consider that the cat's jumping efficiency is equal to 100%, and when landing, it does not waste energy.

Cat and all shelves are considered as material points. Air resistance is not taken into account. Gravitational acceleration  $g$  is known.

### Problem 4. Levers on lever

A weightless lever lies above a cube on a horizontal plane. On the lever, there are two weightless cubes with weightless levers on top, at the ends of which small weights of masses  $M, m_1, m_2$  and  $m$  are fixed (fig. 16). All three levers are located in one vertical plane, parallel to a pair of faces of each cube and coinciding with the plane of the image. According to the figure, all three levers are divided by cross marks into equal segments for the length counts. The mass  $M = 40$  g is given, also any masses  $m_1$  and  $m_2$  can be taken. At which values of mass  $m$  the balance is possible? The answer indicates how many among the mass values  $m$  found are expressed as an integer number of grams.

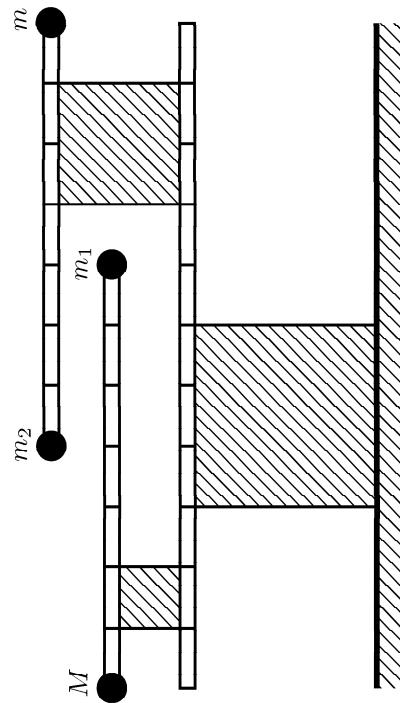


Fig. 16

### Problem 5. Wire polygon

All sides and diagonals of the regular 2020-gon were made of several types of wire, materials, and cross-section of which were chosen in such a way, so that the resistance of each side and of each diagonal is equal to  $R = 50$  Ohm. At each vertex, good electrical contact is ensured between all the wire segments. All wire segments at all intersections points of diagonals (except for the vertices) are isolated from each other. Find the  $R_0$  resistance between two adjacent vertices of the wire polygon. Express the required value in units of «mOhm» and indicate its numerical value rounded up to three digits as an answer.

**Problem 6. Supercooled water**

The insulated vessel contained supercooled water with a mass of  $M$  at normal pressure and a temperature below  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . A very small piece of ice was introduced into the system, which became the center of crystallization. At what is the highest initial temperature  $t_{\max}$  all water will freeze? Find the mass  $m$  of formed ice if the initial temperature  $t$  is higher than  $t_{\max}$ . The specific heat of water  $c = 4200 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$  is temperature independent, water's specific heat of crystallization at normal pressure and temperature  $t_0$  is  $\lambda = 330 \text{ kJ}/\text{kg}$ .

**Problem 7. Mirror Earth**

At the initial moment, the ISS (International Space Station), flying in a circular orbit around Earth at an altitude  $H = 400 \text{ km}$  above its surface, crossed the segment connecting centers of Earth and Sun, and directly under ISS, astronauts could observe complete calm through the clear sky over a large area of the Pacific Ocean. How long time  $T$  will it take for the image of Sun in the ocean to be approaching the ISS with a velocity of  $u = 0.4 \text{ km/s}$ ? At what distance  $L$  from ISS will the image be at this moment? Consider the Earth as a ball with a radius  $R = 6400 \text{ km}$ , gravitational acceleration on Earth's surface is  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**Senior league****Problem 1. Jumping cat**

1. Cat wants to jump from one shelf to another and then back.  $v_1$  and  $v_2$  are known minimum initial cat's speeds, at which it can make these jumps. Find the modulus of heights difference  $H$  and the distance  $R$  between shelves.

2. A cat with a mass  $m$  jumps on the shelves  $A_1, A_2, \dots, A_n$  with specified order ( $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n$ ), stopping after each jump. The height difference between the last and first shelves is  $\Delta H$ , and the polyline  $A_1 A_2 \dots A_n$  length is  $L$ . What is the minimum energy required for a cat to complete a series of jumps? Consider that the cat's jumping efficiency is equal to 100%, and when landing, it does not waste energy.

Cat and all shelves are considered as material points. Air resistance is not taken into account. Gravitational acceleration  $g$  is known.

**Problem 2. Levers on lever**

A weightless lever lies above a cube on a horizontal plane. On the lever, there are two weightless cubes with weightless levers on top, at the ends of which small weights of masses  $M, m_1, m_2$  and  $m$  are fixed (fig. 17). All three levers are located in one vertical plane, parallel to a pair of faces of each cube and coinciding with the plane of the image. According to the figure, all three levers are divided by cross marks into equal segments for the length counts. The mass  $M = 40 \text{ g}$  is given, also any masses  $m_1$  and  $m_2$  can be taken. At which values of mass  $m$  the balance is possible? The answer indicates how many among the mass values  $m$  found are expressed as an integer number of grams.

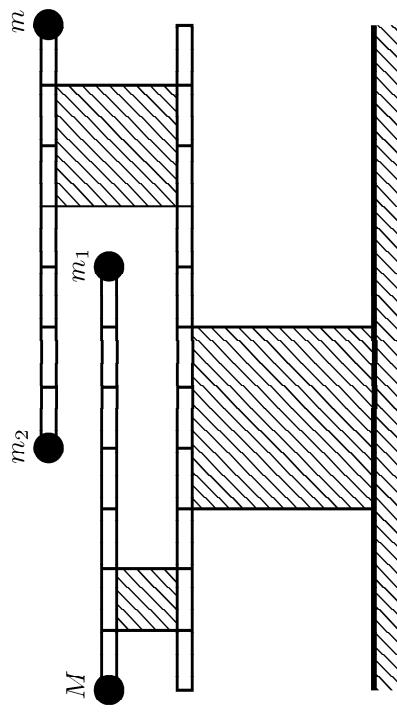


Fig. 17

**Problem 3. Oscillators**

In this problem, oscillators are considered without energy dissipation (there are no resistive forces, all collisions are perfectly elastic). Consider potential energy equal to zero at the bottom of the trajectory.

1. A vertical oscillator called Vintik is a ball bouncing over an elastic horizontal plane. For such oscillator, find the ratio  $k_1$  of average kinetic energy over oscillation period to the total oscillation energy.

2. The Shpuntik parabolic oscillator is a ball moving back and forth along the same parabola between two symmetric elastic supports inclined at an angle  $\varphi$  to the horizon (fig. 18). Find the ratio  $k_2$  of such oscillator's kinetic energy, averaged over oscillation period, to the total vibrational energy at  $\varphi = 45^\circ$ .

3. Dumno decided to make Shpuntik's oscillator «harmonic», choosing such angle  $\varphi$  that the average ball's kinetic and potential energies over oscillations period were the same (as it would be with real harmonic vibrations). At what  $\varphi$  can Dumno reach the goal?

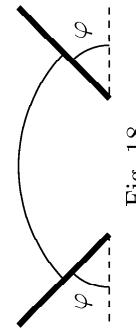


Fig. 18

**Problem 6. Charge near capacitor**

A point charge  $q$  is brought to an uncharged and located far from other charges flat capacitor  $C$  placing it near the center of the nearest plate away from its edges.

1. Find the capacitor's voltage  $U$ .
2. What external force  $F$  in which direction should be applied to a point charge to keep it at rest relative to the fixed capacitor, if the following distances are additionally known:  $d$  between plates;  $a$  between point charge and plate closest to it.

**Problem 7. Variable incandescence**

The formula describes the current-voltage (I-V) characteristic of an incandescent lamp

$$|I| = a \left( \sqrt{\frac{|U|}{b}} + 1 - 1 \right),$$

where  $b = 15$  V and  $a$  — constants, moreover, the difference of this I-V characteristic from direct proportionality is associated only with the temperature dependence of the resistance. The lamp is connected to an alternating voltage source  $U = U_0 \sin \omega t$  with amplitude  $U_0 = 115$  V and such a large cyclic frequency  $\omega$ , that the change in the temperature of the filament during one period of voltage oscillations can be neglected. Find the ratio of the amplitude of current oscillations during the first few periods to the amplitude of current oscillations after a long time. As an answer, specify the desired one, rounded to three digits after the decimal point.

**Problem 8. Mirror Earth**

At the initial moment, the ISS (International Space Station), flying in a circular orbit around Earth at an altitude  $H = 400$  km above its surface, crossed the segment connecting centers of Earth and Sun, and directly under ISS, astronauts could observe complete calm through the clear sky over a large area of the Pacific Ocean. How long time  $T$  will it take for the image of Sun in the ocean to be approaching the ISS with a velocity of  $u = 0.4$  km/s? At what distance  $L$  from ISS will the image be at this moment? Consider the Earth as a ball with a radius  $R = 6400$  km, gravitational acceleration on Earth's surface is  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

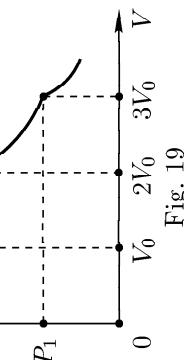


Fig. 19

**Problem 5. Triple mixture**

In the process of isothermal compression of three ideal gases mixture, taken in equal amounts, the mixture pressure depends on the volume, as shown schematically (not to scale) in fig. 19. Using the numerical values shown on the graph, find the ratio  $(P_1 + P_3)/P_2$ . As an answer, specify the required value rounded to three digits after the decimal point.

## Possible solutions

### Junior league

#### Problem 1. Past the insect

In the insect's reference frame, the ball will have following components of the velocity vector (fig. 20):

$$u_x = v_0 + v \cos \varphi = \frac{3}{2}v\sqrt{3},$$

$$u_y = v + v \sin \varphi = \frac{3}{2}v.$$

The plate's speed is directed along its surface, but due to the absence of friction, this does not in any way affect the reflection of the ball during an absolutely elastic collision.

The required minimum distance  $S$  — is the length of perpendicular  $BE$  to the line  $DE$ , along which the ball flies after bouncing from the plate at point  $D$ .

From the reflection law and consideration of right-angled triangles  $ADC$  and  $BDE$  it follows that the angles are equal  $\angle DAC = \angle DBE$ , which allows you to get the answer:

$$\begin{aligned} S &= BD \cdot \cos \angle DBE = (CB - CD) \cdot \cos \angle DAC = \\ &= (CB - CA \cdot \operatorname{tg} \angle DAC) \cdot \cos \angle DAC = \\ &= \left(2L - L\sqrt{3} \cdot \frac{u_y}{u_x}\right) \cdot \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}L \approx 0.866L. \end{aligned}$$

#### Problem 2. Two wedges

Let  $u_1$  and  $v_0$  — be velocities of the wedge  $m_1$  and the ball immediately after its sliding, respectively then momentum and energy conservation laws have the form

$$\begin{aligned} m_1 u_1 &= m v_0, \\ mgH &= \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2}, \end{aligned}$$

from where it is obtained

$$v_0 = \sqrt{\frac{2m_1 g H}{m + m_1}}.$$

#### Problem 3. Jumping cat

We introduce a coordinate system with the origin in shelf  $A$ ,  $y$  axis is directed upward, and  $x$  — axis is along with the projection of shelf's radius vector  $B$  onto the horizontal plane. Let  $v_0$  — be the jumping cat's initial speed from shelf  $A$  to

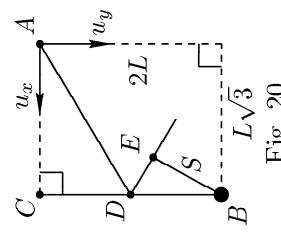


Fig. 20

- When the ball reaches its highest point on wedge  $m_2$ , it will stop relative to the wedge, therefore, from momentum conservation law, we express total velocity  $v_1$  of wedge and ball:

$$v_1 = \frac{m v_0}{m + m_2}.$$

From the energy conservation law

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{(m + m_2) v_1^2}{2} + mgh$$

Lets find the desired height:

$$h = \frac{m_2 v_0^2}{2(m + m_2)g} = \frac{m_1 m_2 H}{(m + m_1)(m + m_2)}.$$

**Note.** If we write the last expression as

$$h = \frac{m_1}{m + m_1} \cdot \frac{m_2}{m + m_2} \cdot H,$$

then it becomes clear that the first fraction is the ball efficiency of converting the potential energy into kinetic energy when leaving the first wedge, and the second fraction is the efficiency of the transformation of the ball's kinetic energy into the potential energy when driving onto the second wedge. We invite readers to think independently about the applicability of this idea when solving a problem in which the first wedge would be left on the plane, thereby allowing repeated ball with the wedges interactions.

2. Wedge  $m_2$  will have maximum speed when the ball slides off of it. Let  $u_2$  — be the ball's velocity directed from the wedge  $m_2$  after sliding off the wedge, then momentum and energy conservation laws have the form

$$m v_0 = -m u_2 + m_2 v_2,$$

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m u_2^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

from where we find the required speed:

$$v_2 = \frac{2m v_0}{m + m_2} = \frac{2m}{m + m_2} \sqrt{\frac{2m_1 g H}{m + m_1}}.$$

shelf  $B$ ,  $t$  — be the cat's flight time, then for the coordinates  $x$  and  $y$  of shelf  $B$  one can write the equations

$$x = v_{0x}t, \quad y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2},$$

from where we express the projections of the initial speed:

$$v_{0x} = \frac{x}{t}, \quad v_{0y} = \frac{y}{t} + \frac{gt}{2}.$$

Using the Pythagorean theorem for velocities ( $v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$ ) and for coordinates ( $R^2 = x^2 + y^2$ ), we obtain the expression

$$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = \frac{x^2 + y^2}{t^2} + gy + \frac{g^2 t^2}{4} = gy + \frac{gR}{2} \left( \frac{2R}{gt^2} + \frac{gt^2}{2R} \right).$$

It is known that the minimum of two positive reciprocal values in sum is equal 2, when each of the quantities is equal 1, which can be proved through the derivative or through the selection of a complete square:

$$f(z) = z + \frac{1}{z} = \left( \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 + 2.$$

Thus, for the minimum initial velocity, the following formula is valid:

$$v_{0\min}^2 = gy + \frac{gR}{2} \cdot 2 = g(R + y). \quad (16)$$

1. Applying cat's general result for two jumps from the first point of the problem, we obtain the equations

$$v_1^2 = g(R + y), \quad v_2^2 = g(R - y), \quad H = |y|,$$

from which we find required expressions:

$$R = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2g}, \quad H = \frac{|v_1^2 - v_2^2|}{2g}.$$

2. Using the formula (16), we find the minimum energy required for cat's first jump:

$$E_{1\min} = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mg}{2}(L_1 + \Delta H_1),$$

where  $L_1$  and  $\Delta H_1$  — are the distance and height difference between the shelves  $A_1$  and  $A_2$ . Summing up similar expressions for all jumps, we get the answer:

$$E_{\min} = \frac{mg}{2}(L + \Delta H). \quad (20)$$

shelf  $B$ ,  $t$  — be the cat's flight time, then for the coordinates  $x$  and  $y$  of shelf  $B$

#### Problem 4. Levers on lever

In order to write the balance conditions, it is necessary to find normal force application points acting from the cube's side on the levers relying on them. Balance is possible under the condition  $m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$  (boundary values have yet to be found). Moreover, in the case,  $m = m_{\min}$ , the lower lever balances, leaning on the point  $A$ , and point  $B$  in the case of  $m = m_{\max}$  (fig. 21).

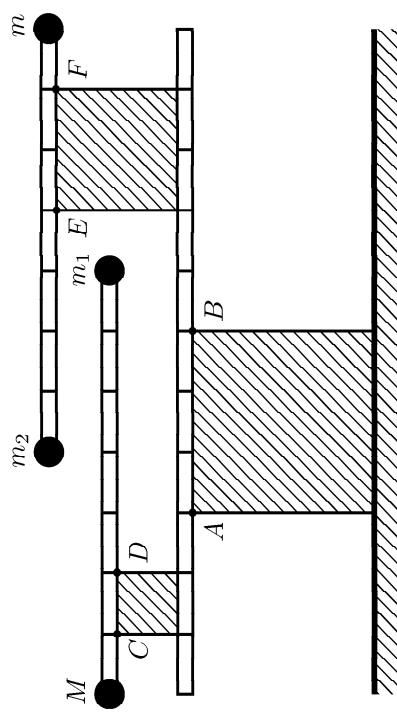


Fig. 21

Let  $L$  be the distance — between adjacent marks on the levers, then the balance condition of the lower lever in the case  $m = m_{\min}$  (the equation of moments with respect to the pole  $A$ ) has the form

$$Mg \cdot 3L = m_2g \cdot L + m_1g \cdot 4L + m_{\min}g \cdot 8L, \quad (17)$$

where after receiving expressions, we obtain

$$m_{\min} = \frac{3M - m_2 - 4m_1}{8}. \quad (18)$$

**Note.** Note, torque sign (side of equality (17)) depends on which side of pole  $A$  the force line goes but does not depend on which upper lever the weight is attached. For example, the torque  $m_{1g}$  is written on the right-hand side of the equality, although the weight  $m_1$  is attached to the lever relying on the left cube.

The expression (18) shows that to achieve the minimum possible value of  $m_{\min}$ , it is needed to take maximum  $m_1$  and  $m_2$ . At the maximum value of  $m_1$ , the upper left lever will balance on the point  $D$ , so its balance condition will have the form

$$Mg \cdot 2L = m_1g \cdot 5L, \quad \text{from where } m_1 = \frac{2}{5}M. \quad (19)$$

At the maximum value of  $m_2$ , the upper right lever will balance leaning on the point  $E$ , so its balance condition will have the form

$$m_2g \cdot 4L = m_{\min}g \cdot 3L, \quad \text{from where } m_2 = \frac{3}{4}m_{\min}. \quad (20)$$

After the substitution of formulas (19) and (20) into the expression (18) we receive the equation, from which we find the desired lower limit:

$$m_{\min} = \frac{4}{25}M.$$

The balance condition of lower lever in case  $m = m_{\max}$  (the torque equation with respect to the pole  $B$ ) has the form

$$Mg \cdot 6L + m_2 g \cdot 2L = m_1 g \cdot L + m_{\max} g \cdot 5L,$$

where, after simplification, we obtain the expression

$$m_{\max} = \frac{6M + 2m_2 - m_1}{5}. \quad (21)$$

This expression shows that in order to reach the maximum possible value  $m_{\max}$ , it is needed to take the minimum  $m_1$  and the maximum  $m_2$ . At minimum value  $m_1$ , the upper left lever will balance, relying on point  $C$ , so its balance condition will have the form

$$Mg \cdot L = m_1 g \cdot 6L, \quad \text{from where} \quad m_1 = \frac{1}{6}M. \quad (22)$$

At maximum value  $m_2$ , the upper right lever will balance on the point  $E$ , so its balance condition will have the form

$$m_2 g \cdot 4L = m_{\max} g \cdot 3L, \quad \text{from where} \quad m_2 = \frac{3}{4}m_{\max}. \quad (23)$$

**Note.** It is curious that the formulas (20) and (23) are essentially the same, although the similar formulas (19) and (22) are different. The difference seems natural since, in one case, we are looking for the minimum and maximum in other. In one case, the system almost falls left, in other - to the right, but the coincidence bothers. Doubts disappear when the acting force line  $m_2 g$  passes between the points  $A$  and  $B$ , that is, together with «almost falling» direction change, torque sign  $m_2 g$ , changes so that two changes in the sign neutralize each other.

After the substitution of formulas (22) and (23) into the expression (21) we obtain an equation from which we find the desired upper limit:

$$m_{\max} = \frac{5}{3}M.$$

Thus, balance is possible under the condition

$$m \in [m_{\min}; m_{\max}] = \left[ \frac{4}{25}M; \frac{5}{3}M \right] \approx [6; 4; 66; 7] \text{ g.}$$

None of the range limits are equal to an integer number of grams, so there is no reason to doubt, whether to take into account the limit value. In the range

from 6.4 to 66.7 are integers from 7 to 66 inclusively, the number of which is 60, which is the final answer.

### Problem 5. Wire polygon

All sides and all diagonals of the polygon together form a system of line segments connecting each pair of vertices, that is, instead of the 2020-gon, we can consider a system of  $N = 2020$  points, any two of which are connected by a resistor  $R$ . Among these points, there are two special - these are points  $A_1$  and  $A_2$ , between which the resistance is measured, and all other points ( $A_3, A_4, \dots, A_{2020}$ ) are equivalent to each other, since each of them fits the same description: it is connected by resistors  $R$  with two special points and with  $(N - 3)$  other points (note that special points under this description do not fit since each of them connected by a resistor with only one special point, and not with two).

This logical symmetry means that all non-special points will have equal potentials, and it implies that the current will not flow through the resistors connecting these points. These resistors can be thrown out. On the equivalent circuit (fig. 22), there are no line segments between all non-special points, and each line segment with designated ends has a resistance  $R$ .

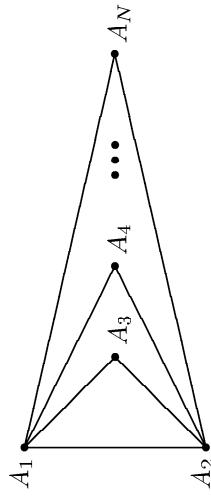


Fig. 22

Special points  $A_1$  and  $A_2$  are connected by one path by resistance  $R$  and  $(N - 2)$  by resistance  $2R$  each, therefore, we find the required total resistance by properties of the parallel connection of resistors:

$$R_0 = \frac{1}{N - 2} + \frac{1}{2R} = \frac{2R}{N} = \frac{R}{1010} \approx 49,5 \text{ mOhm.}$$

### Problem 6. Supercooled water

Let us start with the question about  $m$  since the answer will immediately allow us to find  $t_{\max}$ .  
For simplification, in order to heat water to the temperature  $t_0$  let us supply

$$Q = cM(t_0 - t),$$

at which we know the specific heat of crystallization, and then take away the same amount of heat  $Q$  (to comply with the condition of the vessel's thermal insulation).

As a result, at the same temperature  $t_0$ , water will turn into the ice with a mass

$$m = \frac{Q}{\lambda} = \frac{cM(t_0 - t)}{\lambda}.$$

At temperature  $t_{\max}$  all water will turn into ice, therefore from equation

$$M = \frac{cM(t_0 - t_{\max})}{\lambda}$$

we find the required value:

$$t_{\max} = t_0 - \frac{\lambda}{c} \approx -78.6^\circ\text{C}.$$

### Problem 7. Mirror Earth

Let  $m$  and  $v$  — be the mass and velocity of ISS, respectively, then its centripetal acceleration when moving in orbit is equal to  $a_\perp = v^2/(R + H)$ , and Newton's second law for ISS has the form

$$m \cdot \frac{v^2}{R + H} = m g \cdot \left( \frac{R}{R + H} \right)^2,$$

where, according to universal gravitation law, the gravitational force is inversely proportional to the square of the distance to the Earth's center, and whence we obtain the relation

$$(24) \quad v^2 = \frac{g R^2}{R + H}.$$

Suppose (and at the end, we will check) that by the required time, instant ISS will shift along sufficiently small arc  $ABC$  (fig. 23), so that approximations for small angles can be used in calculations. Segment  $SE$ , connecting Sun and Earth centers will be considered stationary since the angular velocity of Earth's rotation around the sun is much less than the angular velocity of ISS around the Earth. The presence of more than one letter  $S$  in the figure illustrates the fact that the sun in our model is a huge point (the arc on the left is just the edge of this point) at an infinite distance. Note that Earth's daily rotation does not play any role at all. The ball's rotation around the axis passing through its center does not lead to any changes. According to the condition, the ocean's mirror area is large; the land is far away and will not have time to replace water at rays reflection point.

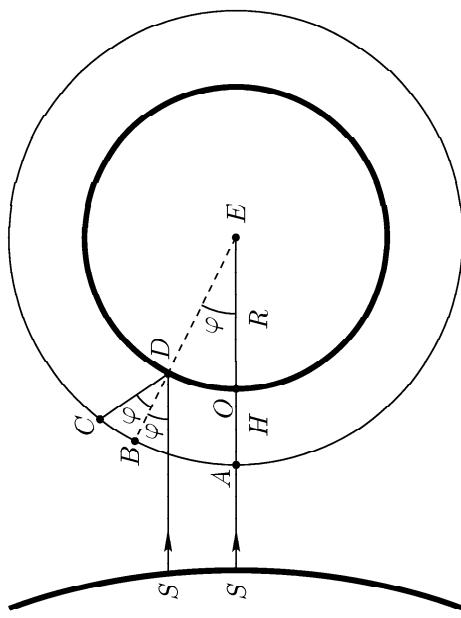


Fig. 23

Suppose that  $\varphi$  are incidence and reflection angles equal to each other ( $\angle SDB$  and  $\angle BDC$ ) and their similar (as corresponding) angle  $\angle SED$ . Then let's express through angle  $\varphi$  the way traveled by ISS to the desired time:

$$vT = \curvearrowleft AB + \curvearrowleft BC = \varphi(R + H) + \varphi H = (R + 2H)\varphi,$$

where, when calculating the second arc length, approximation  $\varphi \ll 1$  was used. From that following relation obtained:

$$(25) \quad \varphi = \frac{vT}{R + 2H}.$$

For sun's image position on line  $DC$ , it is necessary to construct the second line  $SF$  (fig. 24) very close to  $SD$ . Bold lines at points  $D$  and  $F$  — are tangent to the water surface at these points, in other words, small flat mirrors. Mirrors themselves form angle  $\delta$  therefore angle between rays reflected from them will be  $2\delta$ . We will assume that angle  $\delta$  is infinitely small, then the distance between mirrors is found as arc's length  $DF = R\delta$  (fig. 25), and its projection onto the joint perpendicular to the lines  $PD$  and  $PF$  (due to the smallness of  $\delta$ , they can be considered almost parallel) has the form  $DK = DF \cos \angle FDK = R\delta \cos \varphi$  since by the theorem on angles with correspondingly perpendicular sides, the equality  $\angle FDK = \angle BDC = \varphi$ . Considering the segment  $DK$  as an arc of a circle centered at the point  $P$ , we express its length as  $DK = DP \cdot 2\delta$ . Equating two expressions for  $DK$ , we find the distance from the reflection point to the image:

$$DP = \frac{R \cos \varphi}{2}.$$

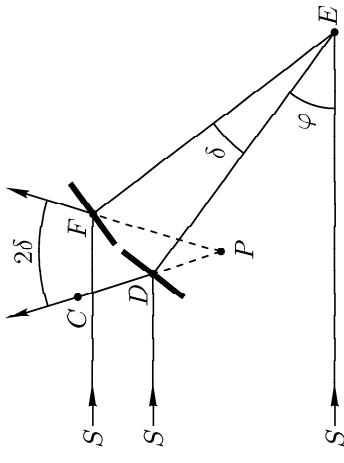


Fig. 24

Let us write down the distance from ISS to Sun image in ocean:

$$x = CP = CD + DP = \frac{BD}{\cos \varphi} + DP = \frac{H}{\cos \varphi} + \frac{R \cos \varphi}{2}.$$

Using approximations  $\cos y \approx 1 - y^2/2$  and  $1/(1+y) \approx 1-y$ , valid for  $y \ll 1$ , let's transform the above expression:

$$x \approx H \left( 1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) + R \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) = \left( \frac{R}{2} + H \right) - \left( \frac{R}{2} - H \right) \frac{\varphi^2}{2}. \quad (26)$$

After formulas substitution (25) and (24) to (26) we obtain the dependence

$$x = \left( \frac{R}{2} + H \right) - \frac{gR^2(R-2H)}{2(R+H)(R+2H)^2} \cdot \frac{T^2}{2},$$

which corresponds to uniformly accelerated approximation with acceleration

$$a = \frac{gR^2(R-2H)}{2(R+H)(R+2H)^2}.$$

From the expression  $w = aT$  for speed of image approaching to ISS, we obtain final answer:

$$T = \frac{2u(R+H)(R+2H)^2}{gR^2(R-2H)} \approx 123 \text{ c.}$$

With help of formulas (24) and (25), one can verify that initial assumption  $\varphi \ll 1$  is fulfilled. Within the same accuracy, the desired distance can be found in the form

$$L = x(T) \approx x(0) = \frac{R}{2} + H = 3600 \text{ km.}$$

**Note.** If you foresee in advance that the value  $T$  is very small (ISS will not have time to shift significantly), then value  $L$  could be found easier: replace convex

spherical mirror of radius  $R$  (ocean) with a thin scattering lens with a focal length  $-R/2$ , optical center at point  $O$  (fig. 23) and additional reflection relative to the lens plane. Then a parallel rays beam from the sun will create an image in focus, coinciding with the middle  $N$  of the segment  $OE$ , from which immediately follows

$$L = AN = AO + ON = H + \frac{R}{2}.$$

However, to find  $T$ , assuming that the image is fixed at point  $N$  (in fact, it is displaced, since as ISS moves, it is created by different beams), it will no longer work. Indeed, the above-described equivalence of convex mirror and scattering lens is an approximate statement. In derivation, corrections of the same smallness order as the effect considered in the problem were neglected. If we apply this incorrect approximation here, we get the dependence

$$x = \left( \frac{R}{2} + H \right) + \frac{gR^3}{(R+2H)(R+H)^2} \cdot \frac{T^2}{2},$$

from which it follows that the image is moving away from the ISS, that is, even a different sign of the effect is obtained.

**Senior league****Problem 1. Jumping cat**

См. зад. 3 МЛ. лиги.

**Problem 2. Levers on lever**

См. зад. 4 МЛ. лиги.

**Problem 3. Oscillators**

To answer all three questions at once, consider the Shpuntik parabolic oscillator in the general case (with an arbitrary angle  $\varphi$ ). The ball moves back and forth along the same parabola. According to the reflection law, that means that the ball falls and bounces along perpendicular to the support. At this moment, its speed is directed at an angle  $\varphi$  to the vertical.

Let  $m$  — be the ball's mass,  $v_0$  — its initial velocity (immediately after hitting the support), then total  $W_0$  and kinetic energy  $E(t)$  depending on ball's flight time  $t$  (before the next collision) have the form:

$$W_0 = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{mv_0^2}{2} + 0 = \frac{mv_0^2}{2},$$

$$E(t) = \frac{m}{2} ((v_0 \sin \varphi)^2 + (v_0 \cos \varphi - gt)^2) = \frac{m}{2} (v_0^2 - 2gtv_0 \cos \varphi + g^2 t^2).$$

Kinetic energy does not depend on the velocity direction. Therefore, the average kinetic energy  $E_0$  will be the same when averaged over the entire period  $T$ , for its half and even for its quarter movement time from lower to the upper point of the trajectory, which is easier to find:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{v_0 \cos \varphi}{g}.$$

Let's average the kinetic energy for this time:

$$E_0 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau E(t) dt = \frac{m}{2} \left( v_0^2 - g\tau v_0 \cos \varphi + \frac{1}{3} g^2 \tau^2 \right) = \frac{mv_0^2}{2} \left( 1 - \frac{2}{3} \cos^2 \varphi \right).$$

**Note.** If  $\tau = T/2 = 2v_0 \cos \varphi/g$ , then the same result is obtained, but substitution  $\tau = T = 4v_0 \cos \varphi/g$  will lead to an error since the used dependence  $E(t)$  does not take into account the change in the velocity vector at the collision moment. Therefore, it is valid only for  $0 \leq t \leq T/2$ .

Let us express the required energy ratio:

$$k(\varphi) = \frac{E_0}{W_0} = 1 - \frac{2}{3} \cos^2 \varphi.$$

**Note.** It is always helpful to check the results for common sense and particular cases: expression  $k(\varphi)$  at any angles gives reasonable values (positive and no more than 1), moreover  $k \approx 1$  is logically achieved at very fast oscillations between almost vertical walls.

1. Vintik's vertical oscillator — is a parabolic oscillator of Shpuntik at  $\varphi = 0$ . Therefore, the first answer is obtained by substitution::

$$k_1 = k(0) = \frac{1}{3}.$$

2. A similar substitution gives the second answer:

$$k_2 = k(45^\circ) = \frac{2}{3}.$$

3. If the average kinetic and potential energies are the same, then each of them is half of the total energy. Therefore, from the equation

$$k(\varphi) = \frac{1}{2}$$

we get the third answer:  $\varphi = 30^\circ$ .

**Problem 4. Supercooled water**

См. зад. 6 МЛ. лиги.

**Problem 5. Triple mixture**

The breakpoints on the isotherm plot in the coordinates  $P(V)$  correspond to the beginning of gas condensation during compression, since at these moments, the ideal gas turns into saturated vapor, and its pressure ceases to depend on the volume. The presence of exactly three breakpoints means that each gas of the mixture has reached its saturation point. Temperature dependence of the saturated vapor pressure does not play a role in this problem since the process is isothermal. Let  $P_a$  be saturated vapor pressure of gas in the mixture that reached saturation first (at volume  $3V_0$ ),  $P_b$  be saturated vapor pressure of gas in the mixture that reached saturation second (at volume  $2V_0$ ),  $P_c$  is the saturated vapor pressure of gases in the mixture that has reached saturation third (for the volume  $V_0$ ). The system system of ideal gas equations for all gases at their saturation points will have the form

$$\begin{cases} P_a \cdot 3V_0 = \nu RT, \\ P_b \cdot 2V_0 = \nu RT, \\ P_c \cdot V_0 = \nu RT, \end{cases}$$

where  $\nu$  — is amount of each gas (same for all),  $T$  — is the temperature of the mixture,  $R$  — gas constant. To simplify, we introduce the notation  $P_0 = \nu RT/(6V_0)$ , then system equations take the form

$$\begin{cases} P_a = 2P_0, \\ P_b = 3P_0, \\ P_c = 6P_0. \end{cases}$$

Let us write down Dalton's law of partial pressures at volumes  $V_0$ ,  $2V_0$  and  $3V_0$ , expressing unknown ideal gases pressures in terms of saturated vapor pressures using inverse proportionality to the volume and substituting the above formulas for saturated vapor pressures:

$$\begin{cases} P_3 = P_a + P_b + P_c = 11P_0, \\ P_2 = P_a + P_b + P_c \cdot \frac{1}{2} = 8P_0, \\ P_1 = P_a + P_b \cdot \frac{2}{3} + P_c \cdot \frac{1}{3} = 6P_0. \end{cases}$$

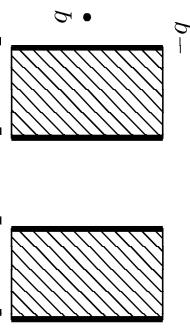
The final answer is

$$\frac{P_1 + P_3}{P_2} = \frac{17}{8} = 2,125.$$

### Problem 6. Charge near capacitor

The main property of conductors in electrostatics: charges are distributed over the conductor's surface so that there is no field in its thickness.

When point charge  $q$  approaches the capacitor's right plate (fig. 26), a non-homogeneously distributed charge  $-q$  is induced on its outer surface, which completely compensates the field of the point charge in the left area from this surface. Therefore, point charge  $q$  and this non-uniformly distributed charge  $-q$  can be excluded from consideration.



After removing the induced charge  $-q$ , the right plate will be distributed uniformly with charge  $+q/2$  in  $+q/2$  on the inner and outer surfaces, so a field does not arise from the thickness of the right plate.

The left plate remains uncharged, but a redistribution of charge must occur on it in order to compensate inside it the external field created by the total charge  $+q$  on the right plate. Therefore charges  $+q/2$  and  $-q/2$  are induced on the outer and inner surfaces of the left plate, respectively (fig. 26).

Charges  $+q/2$  on outer plates surfaces do not create a field in the region of the capacitor. Therefore, these two charges can be excluded from consideration. Thus, only charges  $-q/2$  and  $+q/2$  on inner plates surfaces are remaining. The capacitor is charged with a charge  $q/2$  up to voltage

$$U = \frac{q}{2C}.$$

To find the power  $F$  let us use the image method: non-uniformly distributed charge  $-q$  induced on the right plate's outer surface creates the same field to the right area of this surface, which the point charge  $-q$ , located symmetrically to the point charge  $q$  would create, relative to the outer facing of the right plate.

According to Coulomb's law, we find left directed attraction force acting on a point charge from the side of the induced charge  $-q$ :

$$F_1 = \frac{kq^2}{(2a)^2}.$$

The total charge  $+q$  uniformly distributed over the right plate repulses the point charge to the right with a force

$$F_2 = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} \cdot q = \frac{q^2}{2Cd},$$

where to find the area  $S$  of the plates, the formula for flat capacitor  $C = \varepsilon_0 S/d$  was used.

The left plate does not create a field outside itself. Therefore desired external force must oppose only the vector sum  $F_1$  and  $F_2$ :

$$F = F_1 - F_2 = q^2 \left( \frac{k}{4a^2} - \frac{1}{2Cd} \right).$$

Within the framework of the used model  $S \gg a^2$ , that is  $F_1 \gg F_2$ , and therefore the force  $F$  is directed away from the capacitor.

### Problem 7. Variable incandescence

During the first few vibrations, the lamp filament will not have time to heat up, therefore, its resistance will be the same as at low constant voltages. Let us express this resistance according to Ohm's law:

$$R_0 = \frac{\Delta U}{\Delta I},$$

where  $\Delta U$  и  $\Delta I$  – low voltage and corresponding low current, the connection between which we find through the derivative of the I-V characteristic of the lamp at nonnegative submodule expressions:

$$R_0 = \frac{dU}{dI} = \frac{1}{dI} = \frac{1}{I'(U)} = \frac{2b}{a} \sqrt{\frac{U}{b} + 1} = \frac{2b}{a},$$

where at the last step, the substitution  $U = 0$ , since the required resistance  $R_0$  is observed at low voltages. According to Ohm's law, we find the amplitude of current oscillations in the course of the first few periods:

$$I_1 = \frac{U_0}{R_0} = \frac{aU_0}{2b}.$$

After a long time, the filament of the lamp will reach an equilibrium temperature, which it would have when connecting the lamp to a constant voltage

source, equal to the actual value of the alternating voltage, that is, in the steady state, the formula for the I-V characteristic will relate the actual values of the current and voltage to each other:

$$I_{\text{act}} = a \left( \sqrt{\frac{U_{\text{act}}}{b}} + 1 - 1 \right). \quad (28)$$

Let us denote by  $I_2$  the amplitude of current oscillations after a long time and we write down the formulas for the actual values of the current and voltage,

$$I_{\text{act}} = \frac{I_2}{\sqrt{2}}, \quad U_{\text{act}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (29)$$

From the formulas (28) и (29), we obtain the expression

$$I_2 = a\sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{U_0}{b\sqrt{2}}} + 1 - 1 \right). \quad (30)$$

Remembering the (27) formula, we find the final answer:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_0}{2b\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{U_0}{b\sqrt{2}}} + 1 - 1 \right)^{-1} \approx 1,767.$$

### Problem 8. Mirror Earth

C.M. зад. 7 МЛ. лите.