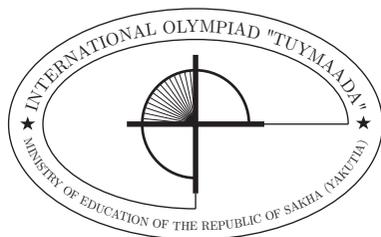


Министерство образования Республики Саха (Якутия)
Малая академия наук Республики Саха (Якутия)
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Министерства образования Республики Саха (Якутия)
и Северо-восточного федерального университета им. М.К. Аммосова.
Телефон: (4112) 496862.
E-mail: achudn@mail.ru, grigyum@yandex.ru.

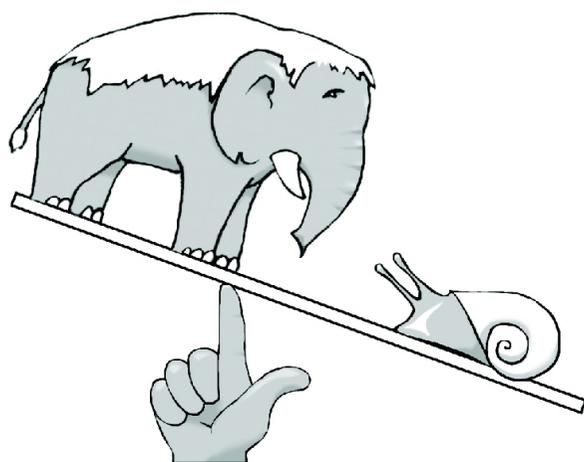
XXIV Международная олимпиада «Туймаада»



Физика

Теоретический тур

Методическое пособие



Якутск, 15–22 июля 2017 г.

Авторы задач

Младшая лига

1. Аванесян Р. Е.
2. Акимов А. Б.
3. Бычков А. И.
4. Плис В. И.
5. Тарнопольский Г. М.

Старшая лига

1. Ефимов В. В.
2. Варламов С. Д.
3. Зильберман А. Р.
4. Чудновский А. В.
5. Чудновский А. В.

Общая редакция — Чудновский А. В.
Перевод — Алексеев С. Н.
Оформление и вёрстка — Чудновский А. В.
Коррекция — Алексеев С. Н.
Ответственный за комплект задач — Григорьев Ю. М.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система \LaTeX 2_ε.

© Авторский коллектив

Подписано в печать 16.07.2017 в 09:10.

677016, г. Якутск, ул. Белинского, д. 58

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

XXIV Международная олимпиада «Туймаада»

Ежегодно в июле в столице Республики Саха (Якутия) — городе Якутск — проходит Международная олимпиада школьников «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии. Олимпиаду организует Министерство образования РС (Я) и Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова на базе физико-математического форума «Ленский край». В разные годы в олимпиаде принимали участие школьники из Азербайджана, Бельгии, Болгарии, Германии, Казахстана, Китая, Кыргызстана, Мексики, Монголии, Румынии, США, Таиланда, Турции, Франции, Южной Кореи и, конечно, из разных регионов России, включая Москву, Санкт-Петербург, Челябинск и другие города. Также в «Туймааде» регулярно участвуют члены сборной России и призёры заключительного этапа Всероссийских олимпиад.

Согласно действующему положению олимпиада по физике включает в себя две лиги: старшую и младшую. В старшей лиге принимают участие учащиеся выпускного и предвыпускного классов, а в младшей — все остальные школьники. Задачи старшей лиги по программе и сложности соответствуют Международной физической олимпиаде, а задачи младшей лиги — 10 классу Всероссийской олимпиады. В каждой лиге проводятся два тура: теоретический и экспериментальный.

XXIV International olympiad "Tuymaada"

Every year in July in the capital of the Republic of Sakha (Yakutia), the city Yakutsk, the International School Physics, Mathematics, Informatics and Chemistry Olympiad «Tuymaada» takes place. The Olympiad is organized by the Republic Sakha's (Yakutia) Department of Education and North-Eastern Federal University n.a. M.K. Ammosov on the base of the physico-mathematical forum «Lensky District». In different years students from Azerbaijan, Belgium, Bulgaria, China, France, Germany, Kazakhstan, Kyrgyzstan, Mexico, Mongolia, Romania, South Korea, Thailand, Turkey, the USA and, of course, from different regions of Russia, including Moscow, Saint-Petersburg, Chelyabinsk and other cities, took part in the Olympiad. Also members of Russian national team and prizewinners of final stage of All-Russian Olympiads regularly participate in «Tuymaada».

According to current regulations, Physics Olympiad includes two leagues: senior league and junior league. Students of graduation and pre-graduation classes participate in senior league, all the other school students — in junior one. Senior league problems correspond in programm and difficulty to those of International Physics Olympiad, junior league problems — to those of 10th class of All-Russian Olympiad. In each league two rounds are held: theoretical one and experimental one.

Младшая лига

Задача 1. Шары с полостями

Первый шар изготовлен из однородного материала плотностью 2ρ и имеет шарообразную полость радиусом R , граница которой проходит через центр шара и касается поверхности шара. Второй шар изготовлен из однородного материала плотностью ρ и имеет шарообразную полость радиусом $2R$, граница которой проходит через центр шара и касается поверхности шара. Шары расположены так, что и они касаются друг друга, и их полости касаются друг друга. Найдите силу F гравитационного притяжения между шарами.

Задача 2. Горка и два груза

На гладкой горизонтальной плоскости покоится горка, поверхность которой с обеих сторон плавно сопряжена с плоскостью. К горке на одинаковой высоте прикреплены два одинаковых груза, масса каждого из которых в μ раз меньше массы горки без грузов. Сперва первый груз отрывается и соскальзывает влево, а затем, когда он уже перестаёт касаться горки, отрывается и соскальзывает вправо второй груз. В процессе движения по горке грузы не подпрыгивают, а после соскальзывания движутся поступательно.

1. Найдите отношение v_2/v_1 скоростей соответственно второго и первого грузов относительно плоскости после прекращения их контакта с горкой.
2. При каких значениях μ горка догонит первый груз?

Задача 3. Круговой цикл

Одноатомный идеальный газ в количестве $\nu = 1$ моль совершает циклический процесс, имеющий вид окружности на PV -диаграмме в некотором масштабе (рис. 1). В каждой из восьми пронумерованных точек график касается изохоры, изобары, изотермы или адиабаты. Известны количества теплоты, которыми газ обменивался с окружающими телами на каждом из участков: $Q_{12} = 7$ Дж, $Q_{23} = 2$ Дж, $Q_{34} = 4$ Дж, $Q_{45} = 11$ Дж, $Q_{56} = 5$ Дж, $Q_{67} = 1$ Дж, $Q_{78} = 3$ Дж, $Q_{81} = 12$ Дж.

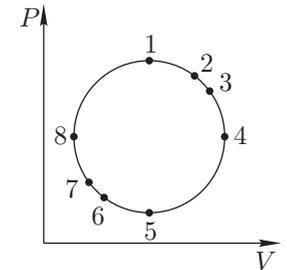


Рис. 1

1. Определите, каких именно политроп касается график в каждой пронумерованной точке.
2. Найдите работу A газа за цикл.
3. Найдите КПД η тепловой машины, работающей по данному циклу.
4. Найдите разность температур ΔT в состояниях 1 и 5.

Задача 4. Заряд вокруг диполя

На расстоянии r от точечного заряда q массой m расположен точечный диполь, дипольный момент \vec{p} которого перпендикулярен отрезку, соединяющему заряд и диполь. Заряд отпускают, а диполь продолжают удерживать. Найдите скорость v заряда в тот момент, когда он пересечёт прямую, проходящую через диполь вдоль его дипольного момента.

Подсказка. Напряжённость электрического поля \vec{E} , создаваемая точечным диполем с дипольным моментом \vec{p} в точке A , находится по формуле

$$\vec{E} = \frac{3k(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{k\vec{p}}{r^3},$$

где k — константа из закона Кулона, \vec{r} — вектор, проведённый из точки положения диполя в точку наблюдения A .

Задача 5. Тень от вращающейся загородки

Тонкая непрозрачная загородка, имеющая форму прямоугольника со сторонами H и $2R$, равномерно вращается вокруг оси, проходящей через центр прямоугольника параллельно стороне H , с угловой скоростью $\omega = \pi c / (3R\sqrt{3})$, где c — скорость света в вакууме. Загородку поместили в широкий пучок света, перпендикулярный оси вращения и стоящему после загородки экрану. Найдите площадь S полной тени на экране без учёта дифракционных явлений.

Старшая лига**Задача 1. Катер и баржа**

Катер, равномерно тянущий баржу на длинном тросе, движется с ней в α раз медленнее, чем без неё при той же силе тяги винта. Если, двигаясь с баржей, катер выключит двигатель, то баржа до полной остановки пройдёт в β раз большее расстояние, чем катер. Во сколько раз масса баржи больше массы катера? Сила сопротивления воды прямо пропорциональна скорости.

Задача 2. Капля в трубке между сосудами

Два одинаковых жёстких сосуда наполнены разными идеальными газами, имеющими температуры T_1 и T_2 (причём $T_1 < T_2$), и соединены тонкой горизонтальной цилиндрической трубкой длиной L , посередине которой находится в равновесии капля ртути, которая не смачивает стенки трубки. Объём газа в трубке составляет очень малую долю α от объёма одного сосуда. Как изменится положение капли, если увеличить температуру в обоих сосудах на одинаковую величину ΔT ?

Задача 3. Конденсаторы и катушка

Изначально незаряженные конденсаторы ёмкостями C_1 и C_2 и идеальный источник ЭДС \mathcal{E} соединили последовательно, а затем в нулевой момент времени параллельно конденсатору C_1 подключили катушку индуктивностью L .

1. В какой момент времени t_1 сила тока через катушку впервые будет максимальной?
2. Найдите максимальную силу тока I_0 через катушку.
3. В какой момент времени t_2 напряжение на конденсаторе C_2 впервые будет максимальным?
4. Найдите максимальное напряжение U_2 на конденсаторе C_2 .

Задача 4. Деревянный сердечник

На цилиндрическую часть длинного остро заточенного осесимметричного деревянного карандаша намотали плотно в один слой много витков тонкого провода, а его концы замкнули между собой. Карандаш с проводом можно считать однородным цилиндром массой m и поперечным сечением S . Карандаш аккуратно поставили грифелем вниз на горизонтальную шероховатую поверхность, включили внешнее однородное вертикальное магнитное поле индукцией B , затем охладили провод, переведя его в сверхпроводящее состояние, после чего карандаш вышел из положения неустойчивого равновесия.

1. Найдите угол φ_0 отклонения карандаша от вертикали в положении устойчивого равновесия.
2. Найдите период T малых колебаний карандаша в вертикальной плоскости, проходящей через ось симметрии карандаша в положении устойчивого равновесия, если известно, что эти колебания возможны.

Задача 5. Угловой отражатель и осколок линзы

Два полубесконечных плоских зеркала расположены взаимно перпендикулярно и касаются друг друга своими краями, образуя угловой отражатель. Большой из осколков тонкой собирающей линзы радиусом R с фокусным расстоянием $2r$, расколотой точно вдоль хорды, проходящей на расстоянии r от центра линзы, расположен так, что его главная оптическая ось перпендикулярна первому зеркалу, линия раскола параллельна второму зеркалу, а оптический центр удалён от первого и второго зеркал на расстояния $5r$ и $2r$ соответственно. Точечный источник света находится на главной оптической оси осколка и удалён от него и первого зеркала на расстояния $3r$ и $8r$ соответственно.

1. При условии $R \gg r$ найдите все изображения источника в описанной оптической системе и отметьте их положения относительно неё на клетчатой бумаге, приняв сторону клетки равной r . Если какое-то изображение лежит не точно на пересечении линий сетки, то укажите вычисленные значения расстояний от этого изображения до плоскостей обоих зеркал.
2. Найдите количество N изображений для каждого из шести вариантов: $R/r \in \{3; 5; 10; 20; 40; 80\}$. Изображения, созданные разными элементами оптической системы и оказавшиеся в одной точке, считаются различными.

Возможные решения

Младшая лига

Задача 1. Шары с полостями

Условия касания шаров и их полостей однозначно задают размеры и расположение шаров с полостями: все четыре центра лежат на одной оси x в точках с указанными на рис. 2 координатами.

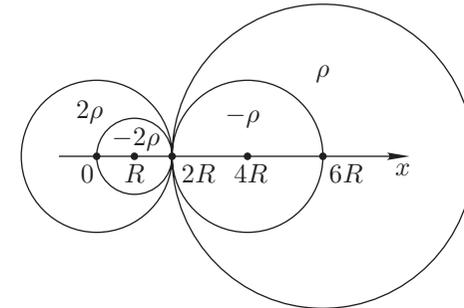


Рис. 2

Вместо шаров с полостями рассмотрим шары без полостей и вложенные в них виртуальные шары, совпадающие с бывшими полостями и имеющие противоположные (отрицательные) плотности, чтобы суммарная плотность материала в области полостей по-прежнему была равна нулю.

Обозначим через γ гравитационную постоянную, через $V = 4\pi R^3/3$ — объём наименьшего шара (бывшей меньшей полости), учтём пропорциональность объёма шара кубу его радиуса и найдём искомую силу F как векторную сумму сил гравитационного притяжения каждой пары шаров, расположенных по разные стороны от общей касательной плоскости:

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\gamma \cdot (2\rho \cdot 2^3V) \cdot (\rho \cdot 4^3V)}{(2R + 4R)^2} + \frac{\gamma \cdot (2\rho \cdot 2^3V) \cdot (-\rho \cdot 2^3V)}{(2R + 2R)^2} + \\
 &+ \frac{\gamma \cdot (-2\rho \cdot V) \cdot (\rho \cdot 4^3V)}{(R + 4R)^2} + \frac{\gamma \cdot (-2\rho \cdot V) \cdot (-\rho \cdot 2^3V)}{(R + 2R)^2} = \\
 &= \frac{3848}{225} \cdot \frac{\gamma \rho^2 V^2}{R^2} = \frac{61568\pi^2}{2025} \cdot \gamma \rho^2 R^4 \approx 300\gamma \rho^2 R^4.
 \end{aligned}$$

Примечание. Напомним, что закон всемирного тяготения записывается точной формулой $F = \gamma m_1 m_2 / r^2$ только для сферически симметричных тел массами m_1 и m_2 , ни одна точка любого из которых не находится внутри другого тела, причём r — это расстояние между их центрами симметрии, а вот в случае тел иной формы указанная формула становится лишь приближённой.

Примерная система оценивания

Вычисление радиусов обоих шаров 1
 Определение взаимного расположения всех четырёх центров 1
 Идея рассмотрения шаров с отрицательными плотностями 2
 Применение формулы для объёма шара 1
 Применение формулы из определения плотности 1
 Применение закона всемирного тяготения 1
 Получение окончательного ответа 3

Задача 2. Горка и два груза

Пусть M и m — массы горки без грузов и каждого груза соответственно, H — начальная высота грузов над плоскостью, u_1 — скорость горки со вторым грузом сразу после соскальзывания первого, тогда законы сохранения импульса и энергии для процесса соскальзывания первого груза имеют вид

$$mv_1 = (M + m)u_1 \quad \text{и} \quad mgH = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{(M + m)u_1^2}{2},$$

откуда с учётом обозначения $\mu = M/m$ находим скорости:

$$v_1 = \sqrt{2gH \cdot \frac{\mu + 1}{\mu + 2}} \quad \text{и} \quad u_1 = \sqrt{\frac{2gH}{(\mu + 1)(\mu + 2)}}.$$

Примечание. В очередной раз обращаем внимание читателей на то, что каждую осмысленную формулу целесообразно проверять, причём не только по размерности, но и на частные случаи. Например, в случае очень массивной горки ($\mu \rightarrow +\infty$) ответом должна быть известная формула $v_1 = \sqrt{2gH}$, а в случае невесомой горки ($\mu = 0$) энергия поделится между грузами поровну, то есть ответом должно быть выражение $v_1 = \sqrt{gH}$. Подстановка указанных значений μ в общую формулу для v_1 даёт ожидаемые частные результаты, что свидетельствует в пользу её правильности, то есть является вероятностным подтверждением, так как не даёт полной гарантии.

Перейдём в систему отсчёта, движущуюся вправо со скоростью u_1 , чтобы можно было рассматривать соскальзывание второго груза точно так же, как и первого. Пусть v'_2 и u'_2 — скорости сразу после прекращения контакта тел в выбранной системе отсчёта соответственно второго груза (вправо) и горки без грузов (влево), тогда замена $\mu + 1$ на μ в формулах для v_1 и u_1 (такой метод называется «жонглирование индексами») позволяет сразу записать:

$$v'_2 = \sqrt{2gH \cdot \frac{\mu}{\mu + 1}} \quad \text{и} \quad u'_2 = \sqrt{\frac{2gH}{\mu(\mu + 1)}}.$$

Направленная вправо скорость v_2 второго груза и направленная влево скорость u_2 горки в исходной системе отсчёта имеют вид

$$v_2 = v'_2 + u_1 = \sqrt{\frac{2gH}{\mu + 1}} \left(\sqrt{\mu} + \frac{1}{\sqrt{\mu + 2}} \right),$$

$$u_2 = u'_2 - u_1 = \sqrt{\frac{2gH}{\mu + 1}} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} - \frac{1}{\sqrt{\mu + 2}} \right).$$

Примечание. Заметим, что всегда верно условие $u_2 > 0$, то есть горка в итоге поедет влево, что вполне логично, так как первый груз «пнул» горку вправо, а второй — влево, но во втором случае горка уже «облегчилась» на один груз, так что второй «пинок» сильнее изменил её скорость.

Таким образом, ответ на первый вопрос найден:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{\mu(\mu + 2)} + 1}{\mu + 1}.$$

Для ответа на второй вопрос нужно решить неравенство $u_2 > v_1$, или

$$\sqrt{\frac{2gH}{\mu + 1}} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} - \frac{1}{\sqrt{\mu + 2}} \right) > \sqrt{2gH \cdot \frac{\mu + 1}{\mu + 2}},$$

откуда после упрощения получаем квадратное неравенство

$$\mu^2 + 2\mu - 1 < 0,$$

решение которого с учётом физического смысла ($\mu > 0$) имеет вид $\mu < \sqrt{2} - 1$.

Примерная система оценивания

Применение закона сохранения импульса 1
 Применение закона сохранения энергии 2
 Выражение для v_1 1
 Выражение для u_1 1
 Выражение для v_2 1
 Выражение для u_2 1
 Ответ для v_2/v_1 1
 Ответ для μ 2

Задача 3. Круговой цикл

На PV -диаграмме изохоры и изобары являются прямыми, параллельными координатным осям, поэтому точки 1 и 5 являются точками касания графика цикла с изобарами, а точки 4 и 8 — с изохорами. Изотерма имеет вид обычной гиперболы, а адиабата — гиперболы более высокой степени, то есть в точке пересечения изотермы и адиабаты касательная к последней имеет больший угол наклона, поэтому точки 2 и 6 являются точками касания графика цикла с изотермами, а точки 3 и 7 — с адиабатами.

В точках 3 и 7 касания графика цикла с адиабатами подвод тепла сменяется отводом и наоборот, что позволяет найти подведённое Q_+ и отведённое Q_- количества теплоты за цикл:

$$Q_+ = Q_{78} + Q_{81} + Q_{12} + Q_{23} = 24 \text{ Дж},$$

$$Q_- = Q_{34} + Q_{45} + Q_{56} + Q_{67} = 21 \text{ Дж.}$$

Из закона сохранения энергии выражаем работу газа за цикл:

$$A = Q_+ - Q_- = 3 \text{ Дж.}$$

КПД цикла тепловой машины находим по определению:

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{1}{8}.$$

Работа за цикл пропорциональна площади, ограниченной графиком цикла на PV -диаграмме. Отрезок, соединяющий точки 1 и 5, является диаметром, то есть делит круг пополам. А поскольку точки 1 и 5 лежат на одной изохоре, работа, совершённая газом в процессе 8–1, на $A/2$ больше работы, совершённой над газом в процессе 5–8, то есть их алгебраическая сумма равна $A/2$.

Первое начало термодинамики для процесса 5–1 имеет вид

$$-Q_{56} - Q_{67} + Q_{78} + Q_{81} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + \frac{A}{2},$$

откуда после подстановки A в общем виде находим последний ответ:

$$\Delta T = \frac{-Q_{12} - Q_{23} + Q_{34} + Q_{45} - Q_{56} - Q_{67} + Q_{78} + Q_{81}}{3\nu R} \approx 0,6 \text{ К.}$$

Примерная система оценивания

Определение касающихся политроп в каждой пронумерованной точке	2
Ответ для A	3
Ответ для η	2
Ответ для ΔT	3

Задача 4. Заряд вокруг диполя

Приведённая в условии формула для напряжённости электрического поля точечного диполя позволяет представить силу $\vec{F} = q\vec{E}$, действующую на точечный заряд, в виде векторной суммы сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , первая из которых направлена противоположно дипольному моменту, а вторая — вдоль прямой, соединяющей диполь и заряд, что после раскрытия скалярного произведения $\vec{p}\vec{r}$ с учётом выбранного на рис. 3 направления вектора \vec{p} приводит к выражениям

$$F_1 = \frac{kp|q|}{r^3} \quad \text{и} \quad F_2 = 3\frac{kp|q|}{r^3} \cos \varphi.$$

Аналогичные выражения для сил имеют место в другой (внешне совсем не похожей) задаче, которую мы сейчас рассмотрим. Пусть маленькое тело массой m подвесили на невесомой нерастяжимой нити длиной r , отклонили нить до горизонтального положения и отпустили. Какие силы действуют на тело в процессе дальнейшего движения?

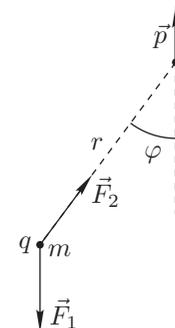


Рис. 3

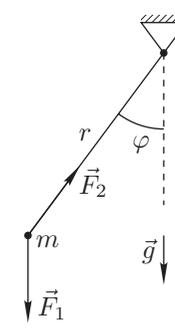


Рис. 4

Тело будет двигаться по окружности радиусом r под действием силы тяжести $F_1 = mg$ и силы натяжения нити F_2 . Пусть v — мгновенная скорость тела, φ — угол отклонения нити (рис. 4), тогда закон сохранения энергии и второй закон Ньютона в проекции на направление центростремительного ускорения имеют вид

$$\frac{mv^2}{2} = mgr \cos \varphi \quad \text{и} \quad m \cdot \frac{v^2}{r} = F_2 - mg \cos \varphi,$$

откуда находим $F_2 = 3mg \cos \varphi$. Таким образом, выражения для сил в обеих задачах по сути совпадают, а для полной аналогии между задачами можно выбрать планету с ускорением свободного падения, удовлетворяющим условию

$$mg = \frac{kp|q|}{r^3}. \tag{1}$$

Из рассмотренной аналогии следует, что заряд под действием поля диполя может двигаться по окружности радиусом r , а из единственности решения уравнений движения следует, что именно так он и будет двигаться.

Закон сохранения энергии в процессе движения тела от верхней точки до нижней имеет вид

$$\frac{mv^2}{2} = mgr,$$

откуда с учётом формулы (1) получаем окончательный ответ:

$$v = \sqrt{2gr} = \sqrt{\frac{2kp|q|}{mr^2}}.$$

Примерная система оценивания

Идея рассмотрения аналогичной задачи	3
Доказательство аналогичности задач	3
Упоминание единственности решения уравнений движения	1
Окончательный ответ	3

Задача 5. Тень от вращающейся загородки

Световой луч, падающий на границу полной тени, должен проходить через края A и B загородки в двух её положениях (рис. 5), а фотон, движущийся вдоль этого луча, должен пролетать отрезок AB за время поворота загородки между этими положениями. Аналогичное условие имеет место для симметричного относительно оси вращения луча, поэтому тень будет симметричной относительно проекции оси вращения на экран.

Пусть φ — угол между рассматриваемыми положениями загородки, тогда равенство времён пролёта фотона и поворота загородки имеет вид:

$$\frac{2R}{c} \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{\omega},$$

откуда после подстановки выражения для ω получаем уравнение

$$\frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} = \varphi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Заметим, что значение $\varphi = \pi/3$ является корнем уравнения. На интервале $\varphi \in (0; \pi)$ левая часть равенства является строго убывающей функцией, а правая — строго возрастающей, поэтому уравнение не может иметь более одного корня на этом интервале, то есть найденный корень — единственный.

Ширина L полной тени имеет вид $L = 2R \sin(\varphi/2) = R$, а её длина совпадает с H , откуда находим искомую площадь: $S = RH$.

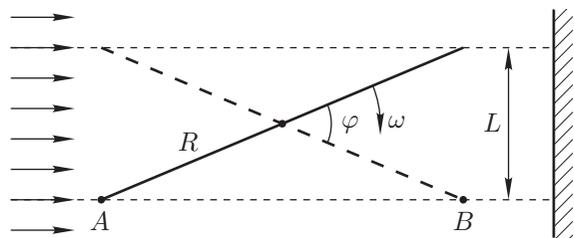


Рис. 5

Примерная система оценивания

Выявление граничных положений загородки	1
Приравнивание времён пролёта и поворота	2
Значение для φ	3
Ответ	4

Старшая лига

Задача 1. Катер и баржа

Поскольку трос длинный, сила сопротивления, действующая на одно судно (катер или баржу), не зависит от движения другого судна. Пусть k_1 и k_2 — коэффициенты пропорциональности между силами сопротивления и скоростями катера и баржи соответственно, F_0 — сила тяги винта, v — скорость катера с баржой, тогда условия равномерности установившихся движений имеют вид

$$F_0 = k_1 \cdot \alpha v \quad \text{и} \quad F_0 = k_1 v + k_2 v,$$

откуда получаем соотношение

$$k_2 = (\alpha - 1)k_1. \tag{2}$$

Рассмотрим движение тела массой m , имеющего начальную скорость v_0 , под действием силы сопротивления $\vec{F} = -k\vec{v}$, где v — мгновенная скорость тела, а k — коэффициент сопротивления. Из второго закона Ньютона в проекции на ось x вдоль начальной скорости

$$ma = -kv$$

после интегрирования по времени до момента остановки получаем уравнение

$$mv \Big|_{v_0}^0 = -kx \Big|_0^S, \quad \text{или} \quad m(v_0 - 0) = -k(0 - S),$$

из которого находим путь S , пройденный телом к моменту остановки:

$$S = \frac{mv_0}{k}. \tag{3}$$

Примечание. Предлагаем читателям самостоятельно вывести формулу $q = LI_0/R$ для заряда q , протёкшего за всё время в контуре, состоящем из катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением R , если начальная сила тока в контуре была равна I_0 , и подумать о причинах сходства этой формулы и формулы (3), после чего сравнить свои выводы с описанными в литературе «электромеханическими аналогиями».

Пусть m_1 и m_2 — массы катера и баржи соответственно, тогда формула (3), применённая к их движению по инерции, приводит к уравнению

$$\frac{m_1 v}{k_1} \cdot \beta = \frac{m_2 v}{k_2},$$

из которого с использованием формулы (2) получаем искомое отношение масс:

$$\frac{m_2}{m_1} = (\alpha - 1)\beta.$$

Примерная система оценивания

Получение соотношения между коэффициентами сопротивления 3
 Вывод формулы для пути при движении по инерции в вязкой среде 4
 Ответ 3

Задача 2. Капля в трубке между сосудами

Одинаковое абсолютное увеличение температуры обоих газов означает большее относительное увеличение меньшей температуры T_1 , поэтому давление первого газа вырастет сильнее и капля будет смещаться в сторону второго газа до восстановления равенства давлений.

Пусть P — начальное давление в каждом сосуде, V — объём каждого сосуда, тогда уравнения Менделеева–Клапейрона для каждого газа имеют вид

$$\frac{PV}{T_1} = \text{const}, \quad \frac{PV}{T_2} = \text{const},$$

откуда после логарифмирования и дифференцирования получаем уравнения

$$\frac{\Delta P_0}{P} + \frac{\Delta V_0}{V} - \frac{\Delta T_0}{T_1} = 0, \quad \frac{\Delta P_0}{P} - \frac{\Delta V_0}{V} - \frac{\Delta T_0}{T_2} = 0, \quad (4)$$

где ΔV_0 — изменение объёма, равное половине объёма трубки и имеющее разные знаки для разных газов, а ΔP_0 и ΔT_0 — изменения давления и температуры, при которых капля смещается до конца трубки. Правомомерность подстановки указанных конечных приращений вместо бесконечно малых дифференциалов dP , dV и dT следует из условия $\alpha \ll 1$. После вычитания уравнений (4) и подстановки соотношения $\Delta V_0 = \alpha V/2$ получаем выражение

$$\Delta T_0 = \frac{\alpha T_1 T_2}{T_2 - T_1}.$$

Таким образом, при больших изменениях температуры ($\Delta T > \Delta T_0$) капля стечёт во второй сосуд, после чего газы перемешаются, а при малых изменениях температуры ($\Delta T < \Delta T_0$) капля сместится на расстояние Δx , которое в силу условия $\alpha \ll 1$ можно считать линейно зависящим от температуры:

$$\Delta x = \frac{L}{2} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \frac{L(T_2 - T_1)}{2\alpha T_1 T_2} \cdot \Delta T.$$

Примерная система оценивания

Обоснование смещения капли в сторону второго сосуда 1
 Применение уравнения Менделеева–Клапейрона 2
 Нахождение граничного значения ΔT_0 3
 Ответ при малых ΔT (выражение для Δx) 3
 Ответ при больших ΔT (описание результата) 1

Задача 3. Конденсаторы и катушка

Примечание. Типичное решение подобных задач включает рассмотрение протёкших зарядов и работы источника, однако есть гораздо более эффективный подход, основанный на упрощении схем с помощью свойств последовательного и параллельного соединений элементов в ситуациях, когда согласно распространённому ошибочному мнению это делать якобы нельзя.

Начальное напряжение U_0 на конденсаторе C_1 сразу после подключения источника и до подключения катушки найдём по свойствам последовательного соединения:

$$U_0 = \frac{1}{C_1} \cdot \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot \mathcal{E} \right) = \frac{C_2 \mathcal{E}}{C_1 + C_2}.$$

Перерисуем схему после подключения катушки в более наглядном виде (рис. 6). Заменяем последовательно соединённые источник и конденсатор C_2 на эквивалентный конденсатор ёмкостью $C_3 = C_2$, напряжение на котором отличается на \mathcal{E} от напряжения на конденсаторе C_2 . Далее заменим параллельно соединённые конденсаторы C_1 и C_3 на эквивалентный конденсатор ёмкостью $C = C_1 + C_2$ с начальным напряжением U_0 , что превратит схему в обычный LC -контур, период T колебаний в котором находится по формуле Томсона: $T = 2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}$.

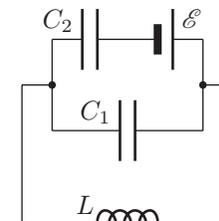


Рис. 6

1. Максимальная сила тока через катушку будет наблюдаться впервые через четверть периода после максимума напряжения на эквивалентном конденсаторе C , имевшего место в начальный момент времени:

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{L(C_1 + C_2)}.$$

2. Запишем закон сохранения энергии при колебаниях:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2},$$

откуда находим максимальную силу тока:

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{C_2 \mathcal{E}}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}.$$

3. Напряжение на конденсаторе C_2 будет максимальным (по модулю), когда напряжение на конденсаторе C будет максимальным и противоположным по знаку напряжению на источнике, то есть впервые это произойдёт через половину периода:

$$t_2 = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{L(C_1 + C_2)}.$$

4. Максимальное напряжение на конденсаторе C_2 найдём из условия отличия его на \mathcal{E} от напряжения на эквивалентном конденсаторе:

$$U_2 = U_0 + \mathcal{E} = \mathcal{E} \left(1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right).$$

Примерная система оценивания

Ответ для t_1	2
Ответ для I_0	3
Ответ для t_2	2
Ответ для U_2	3

Задача 4. Деревянный сердечник

Пусть N — число витков провода, φ — угол отклонения карандаша от вертикали, тогда изменение $\Delta\Phi$ внешнего магнитного потока через соленоид по сравнению с потоком в вертикальном положении задаётся выражением

$$\Delta\Phi = BSN(1 - \cos\varphi).$$

Обозначим через μ_0 магнитную постоянную и пусть l — длина цилиндрической части карандаша, тогда намотанная на неё проволока образует соленоид, индуктивность L которого имеет вид

$$L = \frac{\mu_0 SN^2}{l}.$$

В сверхпроводящем соленоиде индуцируется ток, который создаст собственный магнитный поток, компенсирующий изменение внешнего магнитного потока, откуда находим силу I индукционного тока:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{L} = \frac{Bl(1 - \cos\varphi)}{\mu_0 N}.$$

С помощью формулы для момента сил, действующих на виток с током в магнитном поле, выражаем суммарный момент M_1 магнитных сил, действующих на соленоид:

$$M_1 = -N \cdot B \cdot IS \cdot \sin\varphi = -\frac{B^2 Sl(1 - \cos\varphi) \sin\varphi}{\mu_0},$$

где минус отражает тот факт, что этот момент стремится уменьшить угол φ .

На карандаш действует ещё момент M_2 , создаваемый парой сил — реакцией опоры и силой тяжести:

$$M_2 = \frac{mgl \sin\varphi}{2}.$$

Примечание. Пара сил — это цельный термин, а не просто какие-то две силы. Две силы называются парой, только если их векторная сумма равна нулю. Момент, создаваемый парой сил, вычисляется как произведение модуля одной силы на расстояние между линиями действия сил и не зависит от выбора полюса (докажите это самостоятельно). Магнитные силы дают в сумме ноль, а сила тяжести уравновешена реакцией опоры, поэтому при вычислении обоих моментов M_1 и M_2 не было необходимости выбирать полюс.

Запишем суммарный момент M сил, действующих на карандаш:

$$M = M_1 + M_2 = \left(\frac{mg}{2} - \frac{B^2 S(1 - \cos\varphi)}{\mu_0} \right) \cdot l \sin\varphi.$$

Из условия равновесия $M(\varphi_0) = 0$ находим ожидаемое нулевое отклонение в положении неустойчивого равновесия и искомое отклонение φ_0 в положении устойчивого равновесия:

$$\cos\varphi_0 = 1 - \frac{\mu_0 mg}{2B^2 S}.$$

Заметим, что при отрицательном значении выражения для $\cos\varphi_0$ карандаш не провалится сквозь опору, а будет устойчиво лежать на ней, поэтому полный ответ на первый вопрос выглядит так:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \arccos\left(1 - \frac{\mu_0 mg}{2B^2 S}\right), & \text{если } 2B^2 S > \mu_0 mg; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } 2B^2 S \leq \mu_0 mg. \end{cases}$$

Для упрощения дальнейших вычислений введём обозначение

$$a = \frac{\mu_0 mg}{2B^2 S}$$

и перепишем полученные ранее формулы с его использованием:

$$\cos\varphi_0 = 1 - a, \quad M = \frac{B^2 Sl}{\mu_0} (a - 1 + \cos\varphi) \sin\varphi.$$

Лежащий на опоре карандаш колебаться не может, поэтому из возможности рассматриваемых колебаний следует условие $a < 1$. Выразим эффективную угловую жёсткость $k(\varphi)$ в произвольном положении и найдём её значение k_0 в положении равновесия:

$$k(\varphi) = -\frac{dM}{d\varphi} = \frac{B^2 Sl}{\mu_0} (1 - (a - 1) \cos\varphi - 2 \cos^2\varphi),$$

$$k_0 = k(\varphi_0) = \frac{B^2 Sl}{\mu_0} (2a - a^2) = \frac{mgl}{2} (2 - a).$$

Положительность k_0 означает, что найденное положение равновесия действительно является устойчивым и колебания около него возможны. Момент инерции I карандаша относительно оси, проходящей через его точку опоры перпендикулярно карандашу, тогда даёт табличной формулой $I = ml^2/3$. Искомый период крутильных колебаний имеет вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g(2 - \frac{\mu_0 mg}{2B^2 S})}}.$$

Примерная система оценивания

Выражение для I 1
 Выражение для $M(\varphi)$ 2
 Ответ для φ_0 при $2B^2S > \mu_0 mg$ 2
 Ответ для φ_0 при $2B^2S \leq \mu_0 mg$ 1
 Выражение для k_0 2
 Ответ для T 2

Задача 5. Угловой отражатель и осколок линзы

Изобразим на клетчатой бумаге сечение оптической системы плоскостью, проходящей через главную оптическую ось осколка линзы перпендикулярно обоим зеркалам (рис. 7). Отметим большими точками основные элементы: общий край зеркал C , источник света S , оптический центр осколка O , его фокусы F_1 и F_2 , а также его края A и B , расположенные на разных расстояниях от центра: $OA = R > r = OB$.

Чтобы не запутаться при построении изображений, пронумеруем элементы (1 — первое зеркало, 2 — второе зеркало, 3 — осколок линзы) и будем писать в индексе обозначения каждого изображения последовательность номеров элементов, через которые прошли лучи, создавшие данное изображение.

Чтобы не построить лишние изображения, следует каждый раз проверять, что оптический элемент находится в области видимости предмета, то есть что на оптический элемент падает хотя бы один луч от предмета.

Применение обычных правил построения изображений в зеркале и линзе (напомним, что любая часть линзы создаёт изображение там же, где и целая линза, но вот области видимости могут различаться) даёт 20 изображений, два из которых (S_{12} и S_{21}) совпадают (рис. 7).

Для большей ясности рассмотрим некоторые изображения более подробно. Поскольку зеркала полубесконечные, а линза имеет конечный размер, обязательно найдутся лучи, идущие от источника S к первому зеркалу мимо линзы. После отражения они создадут изображение S_1 , но попасть в линзу ни напрямую, ни после отражения ещё и от второго зеркала, создав тем самым изображение S_{12} , они не смогут, в чём легко убедиться, рассмотрев проекции этих лучей на плоскость рис. 7, поэтому изображений S_{13} и S_{123} не существует.

Есть ровно два изображения (S_{213} и S_{2132}), которые лежат не точно на пересечениях линий сетки, поэтому их положения нужно вычислить по формулам. Изображённый на рис. 7 пунктиром луч создаёт после первого отражения изображение S_2 , после второго — S_{21} , а после преломления — S_{213} . Пусть $f = 2r$ — фокусное расстояние линзы, $a = 13r$ и b — расстояния от плоскости линзы до предмета S_{21} и его изображения S_{213} соответственно, тогда из формулы тонкой линзы получаем выражение

$$b = \frac{af}{a - f} = \frac{26}{11}r,$$

а из подобия треугольников, возникающих при проведении луча через оптический центр линзы, находим расстояние l от S_{213} до главной оптической оси:

$$l = \frac{b}{a} \cdot 4r = \frac{8r}{11}.$$

Поскольку $l < r < R$, рассматриваемый луч может идти в сторону второго зеркала, поэтому изображение S_{2132} будет существовать при любых значениях R . Таким образом, расстояния x и y от любого из изображений S_{213} и S_{2132} до плоскостей первого и второго зеркал соответственно имеют вид:

$$x = 5r + b = \frac{81}{11}r, \quad y = 2r + l = \frac{30}{11}r.$$

Представленные на рис. 7 изображения построены в предположении $R \gg r$, а теперь предстоит выяснить, какие из них не будут наблюдаться при меньших значениях R . Для этого нужно для каждого изображения построить создающие его граничные лучи, двигаясь мысленно в направлении к источнику, и найти их точки пересечения с плоскостью линзы. Итогом этих несложных (хотя и многочисленных) построений является табл. 1, из которой следует ответ на второй вопрос (табл. 2).

Т а б л и ц а 1

Если ...	то существует ...
$R > 1,5r$	S_{312}
$R > 4,5r$	S_{3123}
$R > 8r$	S_{2313} и S_{23132}
$R > 12r$	S_{31232}
$R > 21,5r$	S_{2312}
$R > 24,5r$	S_{23123}
$R > 44r$	S_{231232}

Т а б л и ц а 2

R/r	N
3	13
5	14
10	16
20	17
40	19
80	20

Примерная система оценивания

Рисунок с 20-ю изображениями (по 0,25 баллов за каждое изображение в правильном месте, минус 0,25 балла за каждое изображение в ошибочном месте, но не меньше нуля в сумме за этот пункт) ... 5
 Значения x и y 2
 Все шесть значений N (по 0,5 балла за каждое верное значение) 3

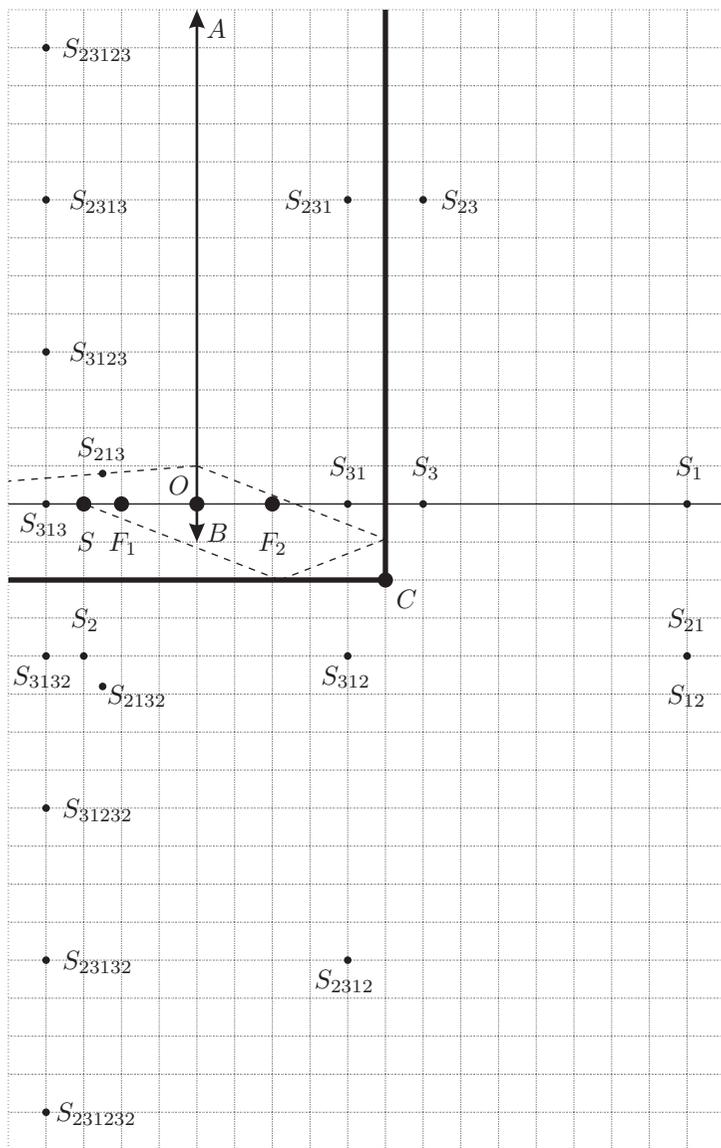


Рис. 7

Junior league

Problem 1. Balls with cavities

The first ball is made of a homogeneous material of density 2ρ and has a spherical cavity of radius R , a boundary of which passes through the center of the ball and touches the surface of the ball. The second ball is made of a homogeneous material of density ρ and has a spherical cavity of radius $2R$, a boundary of which passes through the center of the ball and touches the surface of the ball. The balls are arranged so that both they touch each other and their cavities touch each other. Find a force F of gravitational attraction between the balls.

Problem 2. Hill and two weights

A hill rests on a smooth horizontal plane, surfaces of the hill on both sides smoothly transition to the plane. Two identical weights are attached to the hill at the same height, a mass of each weight is by a factor of μ less than a mass of the hill without the weights. Initially, the first weight comes off and slides to the left, and then, when it no longer touches the hill, the second weight comes off and slides to the right. The weights do not bounce during these motions on the hill, and after the slides they move translationally.

1. Find a ratio v_2/v_1 of speeds of the second and first weights respectively relative to the plane after terminations of their contacts with the hill.
2. For what values of μ will the hill catch up with the first weight?

Problem 3. Circular cycle

A monatomic ideal gas in an amount of $\nu = 1$ mol completes a cyclic process, which has a form of a circumference in a PV diagram on a certain scale (fig. 8). At each of eight numbered points, the diagram touches an isochor, isobar, isotherm, or adiabat. Amounts of heat, which were exchanged by the gas with surrounding bodies at each part, are known: $Q_{12} = 7$ J, $Q_{23} = 2$ J, $Q_{34} = 4$ J, $Q_{45} = 11$ J, $Q_{56} = 5$ J, $Q_{67} = 1$ J, $Q_{78} = 3$ J, $Q_{81} = 12$ J.

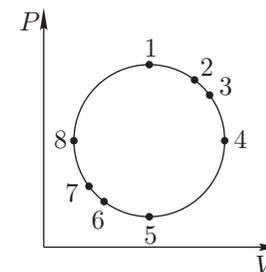


Fig. 8

1. Determine exactly, which polytropes are touched by the diagram at each numbered point.
2. Find work A of the gas per cycle.
3. Find an efficiency η of a heat engine operating according to this cycle.
4. Find a temperature difference ΔT in states 1 and 5.

Problem 4. Charge around dipole

At a distance r from a point charge q of mass m there is a point dipole, a dipole moment \vec{p} of which is perpendicular to a segment connecting the charge and the dipole. The charge is released, but the dipole continues to be held. Find a speed v of the charge at that moment when it crosses a line, which passes through the dipole along its dipole moment.

Hint. An electric field strength \vec{E} , created by the point dipole with the dipole moment \vec{p} at a point A is found using a formula

$$\vec{E} = \frac{3k(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{k\vec{p}}{r^3},$$

where k is a constant from Coulomb's law, \vec{r} is a vector drawn from a point of dipole position to the observation point A .

Problem 5. Shadow of rotating barrier

A thin opaque barrier having a shape of a rectangle with sides H and $2R$ uniformly rotates about an axis passing through the center of the rectangle parallel to the side H with an angular velocity $\omega = \pi c / (3R\sqrt{3})$, where c is the speed of light in vacuum. The barrier is placed in a wide beam of light, which is perpendicular to the axis of rotation and a screen that is after the barrier. Find an area S of a full shadow on the screen without taking into account diffraction phenomena.

Senior league**Problem 1. Boat and barge**

A boat, evenly pulling a barge on a long rope, moves with it slower by a factor of α than without it with the same force of screw thrust. If, moving with the barge, the boat turns off an engine, then the barge will cover till a full stop a distance by a factor of β greater than the boat. By which factor a mass of the barge is larger than a mass of the boat? A resistance force of water is directly proportional to a speed.

Problem 2. Drop in tube between vessels

Two identical rigid vessels are filled with different ideal gases, having temperatures T_1 and T_2 (and $T_1 < T_2$), and they are connected by a thin horizontal cylindrical tube of length L , in the middle of which there is a drop of mercury in equilibrium, which does not wet walls of the tube. A volume of the gas in the tube is a very small fraction α of the volume of one vessel. How will a position of the drop change if the temperature in both vessels is increased by the same amount ΔT ?

Problem 3. Capacitors and coil

Initially uncharged capacitors of capacitances C_1 and C_2 and an ideal source of EMF \mathcal{E} were connected in series, and then at the zero moment of time a coil of inductance L was connected in parallel with the capacitor C_1 .

1. At what moment of time t_1 will a current through the coil be maximum for the first time?
2. Find the maximum current I_0 through the coil.
3. At what moment of time t_2 will a voltage across the capacitor C_2 be maximum for the first time?
4. Find the maximum voltage U_2 across the capacitor C_2 .

Problem 4. Wooden core

Many turns of a thin wire are tightly wound in one layer on cylindrical part of a long sharply ground axisymmetric wooden pencil, and ends of the wire are connected. The pencil with the wire can be considered as a homogeneous cylinder of mass m and cross section S . The pencil is carefully placed with its pencil lead down on a horizontal rough surface, an external uniform vertical magnetic field of induction B is switched on, then the wire is cooled into a superconducting state, after which the pencil goes out of a position of unstable equilibrium.

1. Find an angle φ_0 of deviation of the pencil from a vertical in a position of stable equilibrium.
2. Find a period T of small oscillations of the pencil in a vertical plane passing through an axis of symmetry of the pencil in the position of stable equilibrium, if it is known that these oscillations are possible.

Problem 5. Corner reflector and fragment of lens

Two semi-infinite plane mirrors are arranged at a right angle to one another and touch each other with their edges, forming a corner reflector. The larger of fragments of a thin collecting lens of radius R with a focal length $2r$, which is split exactly along a chord passing at a distance r from the center of the lens, is located so that its main optical axis is perpendicular to the first mirror, the split line is parallel to the second mirror, and the optical center is located at distances $5r$ and $2r$ from the first and second mirrors, respectively. A point source of light is on the main optical axis of the fragment and is located at distances $3r$ and $8r$ from it and the first mirror, respectively.

1. Under a condition $R \gg r$, find all images of the source in the described optical system and mark their positions relative to it on graph paper, taking a side of a square equal to r . If an image does not lie exactly at an intersection of grid lines, then specify calculated values of distances from this image to planes of both mirrors.
2. Find a number N of images for each of six variants: $R/r \in \{3; 5; 10; 20; 40; 80\}$. Images created by different elements of the optical system and found at the same point are considered as different ones.

Possible solutions

Junior league

Problem 1. Balls with cavities

Conditions of contact of balls and their cavities unambiguously determine sizes and an arrangement of the balls with the cavities: all four centers lie on the same axis x at points with coordinates indicated in fig. 9.

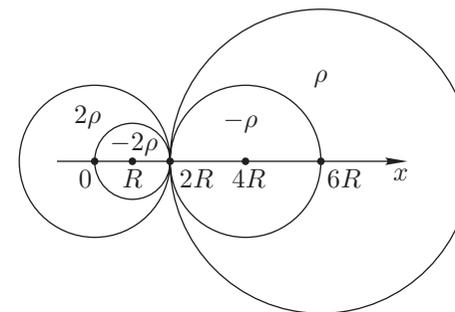


Fig. 9

Instead of the balls with the cavities we consider balls without the cavities and virtual balls enclosed in them, coinciding with the former cavities and having opposite (negative) densities, so that a total density of the material in the region of cavities is still zero.

We will denote the gravitational constant by γ , $V = 4\pi R^3/3$ is the volume of the smallest ball (the former smaller cavity), we will take into account the proportionality of the volume of the ball to the cube of its radius and we will find the required force F as a vector sum of forces of gravitational attraction of each pair of the balls located on different sides of the common tangent plane:

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\gamma \cdot (2\rho \cdot 2^3V) \cdot (\rho \cdot 4^3V)}{(2R + 4R)^2} + \frac{\gamma \cdot (2\rho \cdot 2^3V) \cdot (-\rho \cdot 2^3V)}{(2R + 2R)^2} + \\
 &+ \frac{\gamma \cdot (-2\rho \cdot V) \cdot (\rho \cdot 4^3V)}{(R + 4R)^2} + \frac{\gamma \cdot (-2\rho \cdot V) \cdot (-\rho \cdot 2^3V)}{(R + 2R)^2} = \\
 &= \frac{3848}{225} \cdot \frac{\gamma \rho^2 V^2}{R^2} = \frac{61568\pi^2}{2025} \cdot \gamma \rho^2 R^4 \approx 300\gamma \rho^2 R^4.
 \end{aligned}$$

Note. We recall that the law of universal gravitation is written down by the exact formula $F = \gamma m_1 m_2 / r^2$ only for spherically symmetric bodies of masses m_1 and m_2 , not a single point of any of which is inside of the other body, and r is the distance between their centers of symmetry, but in a case of bodies of another form this formula becomes only approximate.

Grading system

The calculation of the radii of both balls 1
 The determination of the relative location of all four centers 1
 The idea of consideration of the balls with the negative densities 2
 The use of the formula for the volume of the ball 1
 The use of the formula from the density definition 1
 The use of the law of universal gravitation 1
 The obtainment of the final answer 3

Problem 2. Hill and two weights

Let M and m be the masses of the hill without the weights and each weight respectively, H is the initial height of the weights above the plane, u_1 is a speed of the hill with the second weight immediately after the slide of the first weight from the hill, then laws of conservation of momentum and energy for the process of slide of the first weight have the form

$$mv_1 = (M + m)u_1 \quad \text{and} \quad mgH = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{(M + m)u_1^2}{2},$$

from which, taking into account a notation $\mu = M/m$, we find the speeds:

$$v_1 = \sqrt{2gH \cdot \frac{\mu + 1}{\mu + 2}} \quad \text{and} \quad u_1 = \sqrt{\frac{2gH}{(\mu + 1)(\mu + 2)}}.$$

Note. Once again we draw attention of readers to the fact that it is advisable to check every meaningful formula not only in dimension, but also in special cases. For example, in a case of a very massive hill ($\mu \rightarrow +\infty$) an answer should be a known formula $v_1 = \sqrt{2gH}$, and in a case of a weightless hill ($\mu = 0$), the energy will equally be divided between the weights, i.e. an answer should be an expression $v_1 = \sqrt{gH}$. Substitution of the indicated values of μ into the general formula for v_1 gives the expected special results that testifies in favor of its correctness, i.e. it is a probabilistic confirmation, since it does not give a full guarantee.

We go to a frame of reference, moving to the right with the speed u_1 , so that one can consider the slide of the second weight in the same way as the slide of the first one. Let v'_2 and u'_2 be speeds of the second weight (to the right) and the hill without the weights (to the left), respectively, immediately after the termination of contact of the bodies in the chosen frame of reference, then a replacement of $\mu + 1$ by μ in the formulas for v_1 and u_1 (this method is called «index juggling») allows one to immediately write down:

$$v'_2 = \sqrt{2gH \cdot \frac{\mu}{\mu + 1}} \quad \text{and} \quad u'_2 = \sqrt{\frac{2gH}{\mu(\mu + 1)}}.$$

The magnitude v_2 of velocity (directed to the right) of the second weight and the magnitude u_2 of velocity (directed to the left) of the hill in the initial frame of reference have the form

$$v_2 = v'_2 + u_1 = \sqrt{\frac{2gH}{\mu + 1}} \left(\sqrt{\mu} + \frac{1}{\sqrt{\mu + 2}} \right),$$

$$u_2 = u'_2 - u_1 = \sqrt{\frac{2gH}{\mu + 1}} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} - \frac{1}{\sqrt{\mu + 2}} \right).$$

Note. We note that a condition $u_2 > 0$ is always true, i.e. the hill will eventually go to the left, which is quite logical, since the first weight "kicked" the hill to the right, and the second weight "kicked" it to the left, but in the second case the hill was already "lightened" by one weight, so the second «kick» changed its speed more forcefully.

Thus, an answer to the first question has been found:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{\mu(\mu + 2)} + 1}{\mu + 1}.$$

To answer the second question, it is necessary to solve an inequality $u_2 > v_1$, or

$$\sqrt{\frac{2gH}{\mu + 1}} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} - \frac{1}{\sqrt{\mu + 2}} \right) > \sqrt{2gH \cdot \frac{\mu + 1}{\mu + 2}},$$

from which, after simplification, we obtain a quadratic inequality

$$\mu^2 + 2\mu - 1 < 0,$$

a solution of which, taking into account a physical meaning ($\mu > 0$), has a form $\mu < \sqrt{2} - 1$.

Grading system

The use of the law of conservation of momentum 1
 The use of the law of conservation of energy 2
 The expression for v_1 1
 The expression for u_1 1
 The expression for v_2 1
 The expression for u_2 1
 The answer for v_2/v_1 1
 The answer for μ 2

Problem 3. Circular cycle

In the PV diagram, isochors and isobars are straight lines parallel to coordinate axes, therefore, points 1 and 5 are the points, at which the cycle diagram touches the isobars, and the cycle diagram touches the isochors at points 4 and 8. The isotherm has a form of an ordinary hyperbola, and the adiabat is a hyperbola of a higher degree, i.e. at an intersection point of the isotherm and the adiabat, a tangent line to the latter has a larger angle of inclination, therefore, points 2 and 6 are the points, at which the cycle diagram touches the isotherms, and the cycle diagram touches the adiabats at points 3 and 7.

At points 3 and 7, where the cycle diagram touches the adiabats, a heat input is replaced by heat removal and vice versa, which allows finding the supplied Q_+ and removed Q_- amounts of heat per cycle:

$$Q_+ = Q_{78} + Q_{81} + Q_{12} + Q_{23} = 24 \text{ J},$$

$$Q_- = Q_{34} + Q_{45} + Q_{56} + Q_{67} = 21 \text{ J}.$$

Using the law of conservation of energy, we express the work of the gas per cycle

$$A = Q_+ - Q_- = 3 \text{ J}.$$

We find the efficiency of the thermal machine cycle from its definition:

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{1}{8}.$$

The work per cycle is proportional to an area bounded by the cycle diagram in the PV diagram. A segment connecting points 1 and 5 is a diameter, i.e. it divides this circle in half. And since points 1 and 5 lie on one isochor, the work performed by the gas in an 8-1 process is by $A/2$ greater than the work done on the gas in a 5-8 process, i.e. their algebraic sum is equal to $A/2$.

The first law of thermodynamics for a 5-1 process has the form

$$-Q_{56} - Q_{67} + Q_{78} + Q_{81} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + \frac{A}{2},$$

from which, after substitution of A in a general form, we find the last answer:

$$\Delta T = \frac{-Q_{12} - Q_{23} + Q_{34} + Q_{45} - Q_{56} - Q_{67} + Q_{78} + Q_{81}}{3\nu R} \approx 0,6 \text{ K}.$$

Grading system

Determination of touching polytropes at each numbered point.....	2
The answer for A	3
The answer for η	2
The answer for ΔT	3

Problem 4. Charge around dipole

The formula given in the problem statement for the electric field strength of the point dipole allows representing a force $\vec{F} = q\vec{E}$ acting on a point charge in a form of a vector sum of forces \vec{F}_1 and \vec{F}_2 , the first of which is directed opposite to the dipole moment, and the second one points along a straight line connecting the dipole and the charge, which, after finding out the scalar product $\vec{p}\vec{r}$ with account of a direction of the vector \vec{p} , chosen in fig. 10, leads to expressions

$$F_1 = \frac{kp|q|}{r^3} \quad \text{and} \quad F_2 = 3\frac{kp|q|}{r^3} \cos \varphi.$$

Similar expressions for forces take place in another (in outward appearance quite unlike) problem, which we shall now consider. Let a small body of mass m be suspended on a weightless inextensible thread of length r , the thread is deviated till a horizontal position and released. What forces act on the body during a subsequent motion?

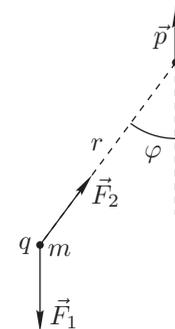


Fig. 10

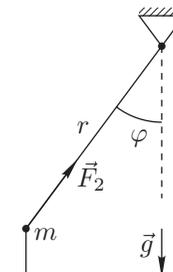


Fig. 11

The body will move along a circumference of radius r under the action of a force of gravity $F_1 = mg$ and a tension force of the thread F_2 . Let v be an instantaneous speed of the body, φ is a deflection angle of the thread (fig. 11), then the law of conservation of energy and Newton's second law in a projection on a direction of centripetal acceleration have the form

$$\frac{mv^2}{2} = mgr \cos \varphi \quad \text{and} \quad m \cdot \frac{v^2}{r} = F_2 - mg \cos \varphi,$$

from which we find $F_2 = 3mg \cos \varphi$. Thus, the expressions for the forces in both problems essentially coincide, and for a complete analogy between the problems a planet can be chosen with a free fall acceleration satisfying a condition

$$mg = \frac{kp|q|}{r^3}. \tag{5}$$

From the considered analogy it follows that the charge under the action of the field of the dipole can move along the circumference with the radius r , and from

uniqueness of a solution of equations of motion it follows that this is how it will move.

The law of conservation of energy during the motion of the body from the top point to the bottom one has the form

$$\frac{mv^2}{2} = mgr,$$

from which, taking into account formula (5), we get a final answer:

$$v = \sqrt{2gr} = \sqrt{\frac{2kp|q|}{mr^2}}.$$

Grading system

An idea of consideration of the similar problem3
 A proof of similarity of the problems3
 A mention of the uniqueness of the solution of the equations of motion 1
 The final answer3

Problem 5. Shadow of rotating barrier

A light ray falling on a border of the full shadow must pass through edges *A* and *B* of the barrier in its two positions (fig. 12), and a photon moving along this ray must fly a segment *AB* during a time of a rotation of the barrier between these positions. A similar condition takes place for a ray symmetric with respect to the rotation axis, therefore, the shadow will be symmetric with respect to a projection of the rotation axis on the screen.

Let φ be an angle between the considered positions of the barrier, then an equality of the times of the flight of the photon and the rotation of the barrier has the form:

$$\frac{2R}{c} \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{\omega},$$

from which, after a substitution of the expression for ω , we obtain an equation

$$\frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} = \varphi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

We note that a value $\varphi = \pi/3$ is a root of the equation. In an interval $\varphi \in (0; \pi)$ the left-hand side of the equation is a strictly decreasing function, and the right-hand side is strictly increasing, therefore, the equation cannot have more than one root in this interval, i.e. the found root is the only one.

A width *L* of the full shadow has the form $L = 2R \sin(\varphi/2) = R$, and its length coincides with *H*, from which we find the required area: $S = RH$.

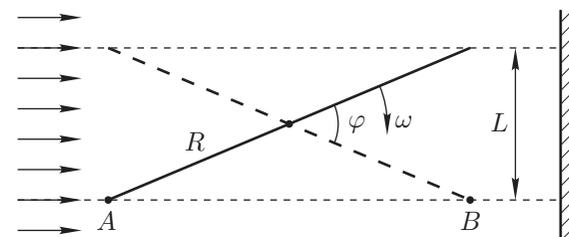


Fig. 12

Grading system

Identification of boundary positions of the barrier 1
 Equalization of the times of the flight and the rotation 2
 The value of φ 3
 The answer 4

Senior league

Problem 1. Boat and barge

Since the rope is long, the resistance force acting on one ship (the boat or barge) does not depend on the movement of the other ship. Let k_1 and k_2 be proportionality coefficients between the resistance forces and the speeds of the boat and barge, respectively, F_0 is the force of screw thrust, v is the speed of the boat with the barge, then conditions of evenness of steady movements have the forms

$$F_0 = k_1 \cdot \alpha v \quad \text{and} \quad F_0 = k_1 v + k_2 v,$$

from which we get a relationship

$$k_2 = (\alpha - 1)k_1. \tag{6}$$

We consider a movement of a body of mass m having an initial velocity v_0 under action of a resistance force $\vec{F} = -k\vec{v}$, where v is the instantaneous speed of the body, and k is the coefficient of resistance. From Newton's second law in a projection on an x axis along the initial velocity

$$ma = -kv$$

after an integration over time till a moment of stop we obtain an equation

$$mv \Big|_{v_0}^0 = -kx \Big|_0^S, \quad \text{or} \quad m(v_0 - 0) = -k(0 - S),$$

from which we find a distance S covered by the body till the moment of the stop:

$$S = \frac{mv_0}{k}. \tag{7}$$

Note. We offer readers to independently derive a formula $q = LI_0/R$ for a charge q flowed during all time in a circuit consisting of a coil of inductance L and a resistor of resistance R , if an initial current in the circuit was I_0 , and to think about reasons for a similarity between this formula and formula (7), then compare their conclusions with «electromechanical analogies» described in literature.

Let m_1 and m_2 be masses of the boat and barge respectively, then formula (7), applied to their inertial motion, leads to an equation

$$\frac{m_1 v}{k_1} \cdot \beta = \frac{m_2 v}{k_2},$$

from which with the use of formula (6) we obtain the required ratio of masses:

$$\frac{m_2}{m_1} = (\alpha - 1)\beta.$$

Grading system

The obtainment of the relationship between the coefficients of resistance 3
 The derivation of the formula for the distance covered during the inertial motion in a viscous medium 4
 The answer 3

Problem 2. Drop in tube between vessels

The same absolute increase of the temperature of both gases means a larger relative increase of the lower temperature T_1 , therefore, pressure of the first gas will increase and the drop will be shifted towards the second gas until an equality of pressures is restored.

Let P be the initial pressure in each vessel, V is the volume of each vessel, then the Mendeleev-Clapeyron equations for each gas have the form

$$\frac{PV}{T_1} = \text{const}, \quad \frac{PV}{T_2} = \text{const},$$

from which, after taking the logarithm and differentiation, we obtain equations

$$\frac{\Delta P_0}{P} + \frac{\Delta V_0}{V} - \frac{\Delta T_0}{T_1} = 0, \quad \frac{\Delta P_0}{P} - \frac{\Delta V_0}{V} - \frac{\Delta T_0}{T_2} = 0, \tag{8}$$

where ΔV_0 is a change of volume, which is equal to half the volume of the tube and having different signs for different gases while ΔP_0 and ΔT_0 are changes of pressure and temperature, for which the drop is shifted to an end of the tube. Appropriateness of substitution of these finite increments instead of infinitesimal differentials dP , dV , and dT follows from a condition $\alpha \ll 1$. After subtraction of equations (8) and substitution of a relation $\Delta V_0 = \alpha V/2$, we obtain an expression

$$\Delta T_0 = \frac{\alpha T_1 T_2}{T_2 - T_1}.$$

Thus, for large changes of temperature ($\Delta T > \Delta T_0$) the drop will flow into the second vessel, after which the gases will mix, and for small changes of temperature ($\Delta T < \Delta T_0$) the drop will be shifted by a distance Δx , which, by virtue of the condition $\alpha \ll 1$, can be assumed to be linearly dependent on the temperature:

$$\Delta x = \frac{L}{2} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \frac{L(T_2 - T_1)}{2\alpha T_1 T_2} \cdot \Delta T.$$

Grading system

Justification of shift of the drop towards the second vessel 1
 The use of the Mendeleev-Clapeyron equation (the ideal gas law) 2
 Finding the end value ΔT_0 3
 The answer for small ΔT (the expression for Δx) 3
 The answer for large ΔT (a result description) 1

Problem 3. Capacitors and coil

Note. A typical solution of such problems involves consideration of flowed charges and work of source, however, there is a much more effective approach based on a simplification of circuits using properties of series and parallel connections of elements in situations, when according to a widespread misconception it is supposedly impossible to do.

We will find an initial voltage U_0 across the capacitor C_1 immediately after a connection of the source and before a connection of the coil using the properties of the series connection:

$$U_0 = \frac{1}{C_1} \cdot \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot \mathcal{E} \right) = \frac{C_2 \mathcal{E}}{C_1 + C_2}.$$

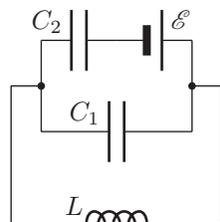


Fig. 13

We will redraw the circuit after the connection of the coil in a more obvious form (fig. 13). We will replace the source and the capacitor C_2 connected in series by an equivalent capacitor of capacitance $C_3 = C_2$, a voltage across which differs by \mathcal{E} from the voltage across the capacitor C_2 . Next, we will replace the capacitors C_1 and C_3 connected in parallel by an equivalent capacitor of capacitance $C = C_1 + C_2$ with the initial voltage U_0 , which will turn the circuit into an ordinary LC circuit, a period T of oscillations in which will be found from the Thomson formula: $T = 2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}$.

1. The maximum current through the coil will be observed for the first time after a quarter of the period after the maximum of voltage across the equivalent capacitor C , which was at the initial moment of time:

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{L(C_1 + C_2)}.$$

2. We will write the law of conservation of energy for the oscillations:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2},$$

from which we will find the maximum current:

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{C_2 \mathcal{E}}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}.$$

3. The voltage across the capacitor C_2 will be maximum (in absolute value), when the voltage across the capacitor C will be maximum and opposite in sign to the voltage on the source, i.e. this will happen for the first time after half a period:

$$t_2 = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{L(C_1 + C_2)}.$$

4. The maximum voltage across the capacitor C_2 we will find from a condition of its difference by \mathcal{E} from the voltage across the equivalent capacitor:

$$U_2 = U_0 + \mathcal{E} = \mathcal{E} \left(1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right).$$

Grading system

The answer for t_1	2
The answer for I_0	3
The answer for t_2	2
The answer for U_2	3

Problem 4. Wooden core

Let N be a number of wire turns, φ is a deviation angle of the pencil from the vertical, then a change $\Delta\Phi$ of the external magnetic flux through a solenoid in comparison with a flux in the vertical position is given by an expression

$$\Delta\Phi = BSN(1 - \cos \varphi).$$

We denote by μ_0 the magnetic constant and let l be a length of the cylindrical part of the pencil, then the wire wound around it forms the solenoid, inductance L of which has the form

$$L = \frac{\mu_0 S N^2}{l}.$$

In a superconducting solenoid, a current is induced, which creates its own magnetic flux compensating a change of the external magnetic flux, whence we find a induction current I :

$$I = \frac{\Delta\Phi}{L} = \frac{Bl(1 - \cos \varphi)}{\mu_0 N}.$$

Using a formula for a moment of forces acting on the turn with the current in the magnetic field, we express a total moment M_1 of the magnetic forces acting on the solenoid:

$$M_1 = -N \cdot B \cdot IS \cdot \sin \varphi = -\frac{B^2 S l (1 - \cos \varphi) \sin \varphi}{\mu_0},$$

where the minus reflects the fact that this moment tends to decrease the angle φ .

Also, a moment M_2 , created by a pair of forces (of support reaction and gravity force), acts on the pencil:

$$M_2 = \frac{mgl \sin \varphi}{2}.$$

Note. The pair of forces is an integral term, and not just any two forces. The two forces are called the pair only if their vector sum is equal to zero. The moment, created by the pair of forces, is calculated as a product of a magnitude of one force

multiplied by a distance between lines of action of forces and does not depend on a choice of a pole (prove it yourselves). The magnetic forces add up to zero, and the gravity force is balanced by the support reaction, therefore, in a calculation of both moments M_1 and M_2 , there was no need to select a pole.

We will write a total moment M of the forces acting on the pencil:

$$M = M_1 + M_2 = \left(\frac{mg}{2} - \frac{B^2 S (1 - \cos \varphi)}{\mu_0} \right) \cdot l \sin \varphi.$$

From an equilibrium condition $M(\varphi_0) = 0$ we find an expected zero deviation in the position of unstable equilibrium and the required deviation φ_0 in the position of stable equilibrium:

$$\cos \varphi_0 = 1 - \frac{\mu_0 mg}{2B^2 S}.$$

We note that for a negative value of the expression for $\cos \varphi_0$ the pencil does not fall through the support, but will lie on it stably, therefore, a full answer to the first question looks like this:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \arccos \left(1 - \frac{\mu_0 mg}{2B^2 S} \right), & \text{if } 2B^2 S > \mu_0 mg; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{if } 2B^2 S \leq \mu_0 mg. \end{cases}$$

To simplify further calculations, we will introduce a notation

$$a = \frac{\mu_0 mg}{2B^2 S}$$

and we will rewrite with its use the formulas obtained earlier:

$$\cos \varphi_0 = 1 - a, \quad M = \frac{B^2 S l}{\mu_0} (a - 1 + \cos \varphi) \sin \varphi.$$

The pencil lying on the support cannot oscillate, therefore, a condition $a < 1$ follows from a possibility of the oscillations under consideration. We express an effective angular stiffness $k(\varphi)$ in an arbitrary position and find its value k_0 in the equilibrium position:

$$k(\varphi) = -\frac{dM}{d\varphi} = \frac{B^2 S l}{\mu_0} (1 - (a - 1) \cos \varphi - 2 \cos^2 \varphi),$$

$$k_0 = k(\varphi_0) = \frac{B^2 S l}{\mu_0} (2a - a^2) = \frac{mgl}{2} (2 - a).$$

Positivity of k_0 means that the found equilibrium position is indeed stable and the oscillations near it are possible. Then, a moment of inertia I of the pencil relative to the axis, passing through its support point perpendicular to the pencil,

is given by a table formula $I = ml^2/3$. The required period of torsional oscillations has the form

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g \left(2 - \frac{\mu_0 mg}{2B^2 S} \right)}}.$$

Grading system

The expression for I 1
 The expression for $M(\varphi)$ 2
 The answer for φ_0 , when $2B^2 S > \mu_0 mg$ 2
 The answer for φ_0 , when $2B^2 S \leq \mu_0 mg$ 1
 The expression for k_0 2
 The answer for T 2

Problem 5. Corner reflector and fragment of lens

We will show on the graph paper a cross-section of the optical system by a plane passing through the main optical axis of the lens fragment perpendicular to both mirrors (fig. 14). We will mark the main elements with large dots: the common edge of the mirrors C , the light source S , the optical center of the fragment O , its focuses F_1 and F_2 , as well as its edges A and B located at different distances from the center: $OA = R > r = OB$.

To avoid confusion when constructing the images, we will number the elements (1 is the first mirror, 2 is the second mirror, and 3 is the lens fragment) and we will write in an index of a notation of each image a sequence of numbers of the elements wherethrough the rays, which generated the image, passed.

To avoid building unnecessary images, it is necessary to check each time that the optical element is in visibility scope of an object, i.e. that at least one ray from the object falls on the optical element.

Usage of usual rules of construction of images in the mirror and lens (recall that any part of the lens creates the image in the same place as a whole lens, but scopes of visibility can differ) gives 20 images, two of which (S_{12} and S_{21}) coincide (fig. 14).

For greater clarity, we will consider some images in more detail. Since the mirrors are semi-infinite, and the lens has the finite size, there must be rays going from the source S to the first mirror past the lens. After reflection, they will create an image S_1 , but they will not be able to get into the lens either directly or also after reflection from the second mirror, thus creating an image S_{12} , which is easy to verify by considering projections of these rays on the plane of fig. 14, therefore there are no images S_{13} and S_{123} .

There are exactly two images (S_{213} and S_{2132}) that do not lie exactly at the intersections of grid lines, therefore their positions must be calculated from formulas. A ray shown in fig. 14 by a dotted line creates an image S_2 after the first reflection, S_{21} after the second one, and S_{213} after refraction. Let $f = 2r$ be the focal length of the lens, $a = 13r$ and b are distances from the plane of the lens to

the object S_{21} and its image S_{213} , respectively, then from a thin lens formula we obtain an expression

$$b = \frac{af}{a-f} = \frac{26}{11}r,$$

but from similarity between triangles that arise when a ray passes through the optical center of the lens, we find a distance l from S_{213} to the main optical axis:

$$l = \frac{b}{a} \cdot 4r = \frac{8r}{11}.$$

Since $l < r < R$, the considered ray can go towards the second mirror, therefore the image S_{2132} will exist for any values of R . Thus, distances x and y from any of the images S_{213} and S_{2132} to the planes of the first and second mirrors, respectively, have the form:

$$x = 5r + b = \frac{81}{11}r, \quad y = 2r + l = \frac{30}{11}r.$$

The images presented in fig. 14 are constructed under an assumption $R \gg r$, and now it is necessary to find out, which of them will not be observed for smaller values of R . To do this, it is necessary to construct for each image boundary rays creating it, mentally moving towards the source, and to find their intersection points with the plane of the lens. A result of these simple (albeit numerous) constructions is table 3, from which an answer to the second question (table 4) follows.

Table 3

If ...	then there exists ...
$R > 1,5r$	S_{312}
$R > 4,5r$	S_{3123}
$R > 8r$	S_{2313} and S_{23132}
$R > 12r$	S_{31232}
$R > 21,5r$	S_{2312}
$R > 24,5r$	S_{23123}
$R > 44r$	S_{231232}

Table 4

R/r	N
3	13
5	14
10	16
20	17
40	19
80	20

Grading system

- The figure with 20 images (0.25 point for each image in a right place, minus 0.25 point for each image in a wrong place, but not less than zero in total for this point).....5
- The values of x and y2
- All six values of N (0.5 point for each correct value)3

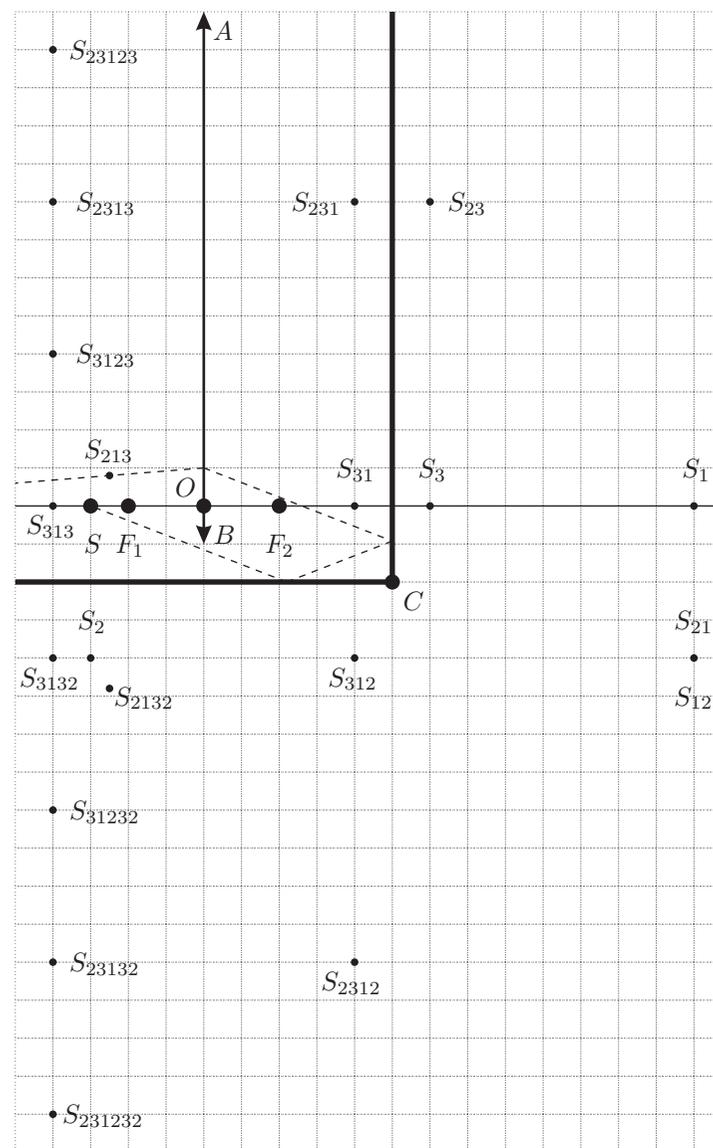


Fig. 14