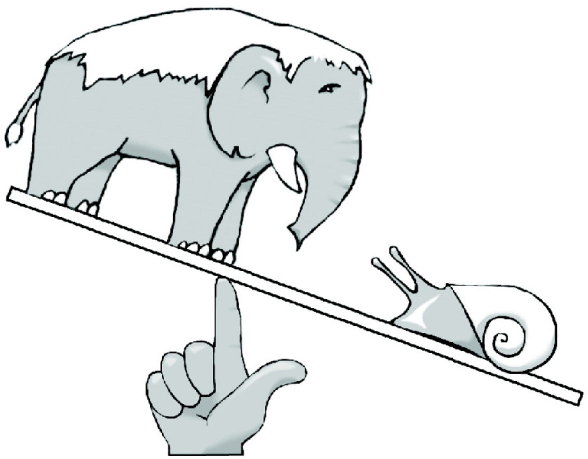
Министерство образования Республики Саха (Якутия)
Малая академия наук Республики Саха (Якутия)
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

XXVI Международная олимпиада «Туймаада»

Физика

Теоретический тур

Методическое пособие



Якутск, 8–14 июля 2019 г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Министерства образования Республики Саха (Якутия)
и Северо-восточного федерального университета им. М.К. Аммосова.
Телефон: (4112) 496862.
E-mail: achudn@mail.ru, grigyum@yandex.ru.

Авторы задач

Младшая лига

1. Аванесян Р. Е.
2. Зильберман А. Р.
3. Варламов С. Д.
4. Варламов С. Д.
5. Ромашка М. Ю.
6. Ромашка М. Ю.
7. Чудновский А. В.

Старшая лига

1. См. зад. 1 мл. лиги.
2. Акимов А. Б.
3. Шеронов А. А.
4. Плис В. И.
5. См. зад. 6 мл. лиги.
6. См. зад. 7 мл. лиги.
7. Варламов С. Д.

Общая редакция — Чудновский А. В.
Перевод — Алексеев С. Н.
Оформление и вёрстка — Чудновский А. В.
Коррекция — Алексеев С. Н.
Ответственный за комплект задач — Григорьев Ю. М.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Подписано в печать 08.07.2019 в 18:10.
677016, г. Якутск, ул. Белинского, д. 58
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

XXVI Международная олимпиада «Туймаада»

Ежегодно в июле в столице Республики Саха (Якутия) — городе Якутск — проходит Международная олимпиада школьников «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии. Олимпиаду организует Министерство образования РС (Я) и Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова на базе физико-математического форума «Ленский край». В разные годы в олимпиаде принимали участие школьники из Азербайджана, Бельгии, Болгарии, Германии, Казахстана, Китая, Кыргызстана, Мексики, Монголии, Румынии, США, Таиланда,Турции, Франции, Южной Кореи и, конечно, из разных регионов России, включая Москву, Санкт-Петербург, Челябинск и другие города. Также в «Туймааде» регулярно участвуют члены сборной России и призёры заключительного этапа Всероссийских олимпиад.

Согласно действующему положению олимпиада по физике включает в себя две лиги: старшую и младшую. В старшей лиге принимают участие учащиеся выпускного и предвыпускного классов, а в младшей — все остальные школьники. Задачи старшей лиги по программе и сложности соответствуют Международной физической олимпиаде, а задачи младшей лиги — 10 классу Всероссийской олимпиады. В каждой лиге проводятся два тура: теоретический и экспериментальный.

XXVI International olympiad "Tuymaada"

Every year in July in the capital of the Republic of Sakha (Yakutia), the city Yakutsk, the International School Physics, Mathematics, Informatics and Chemistry Olympiad «Tuymaada» takes place. The Olympiad is organized by the Republic Sakha's (Yakutia) Department of Education and North-Eastern Federal University n.a. M.K. Ammosov on the base of the physico-mathematical forum «Lensky District». In different years students from Azerbaijan, Belgium, Bulgaria, China, France, Germany, Kazakhstan, Kyrgyzstan, Mexico, Mongolia, Romania, South Korea, Thailand, Turkey, the USA and, of course, from different regions of Russia, including Moscow, Saint-Petersburg, Chelyabinsk and other cities, took part in the Olympiad. Also members of Russian national team and prizewinners of final stage of All-Russian Olympiads regularly participate in «Tuymaada».

According to current regulations, Physics Olympiad includes two leagues: senior league and junior league. Students of graduation and pre-graduation classes participate in senior league, all the other school students — in junior one. Senior league problems correspond in programm and difficulty to those of International Physics Olympiad, junior league problems — to those of 10th class of All-Russian Olympiad. In each league two rounds are held: theoretical one and experimental one.

Младшая лига

Задача 1. Плавающие шары

Два однородных шара, имеющие одинаковый диаметр D и плотности ρ_1 и ρ_2, соединены невесомой нерастяжимой нитью длиной L и плавают в толще жидкости, плотность ρ которой зависит от глубины погружения h по формуле $\rho = \rho_0(1 + kh)$. Найдите глубины h_1 и h_2, на которых расположены центры шаров, и силу натяжения T нити в положении равновесия.

Задача 2. Колебания на двух пружинах

Две одинаковые лёгкие пружины прикреплены к маленькому грузу. Одна из пружин вторым концом прикреплена к полу, а другая — к потолку. В положении равновесия обе пружины вертикальны и сильно растянуты. Найдите отношение периодов малых вертикальных и горизонтальных колебаний груза.

Задача 3. Испарение льда

Зимой в Якутии очень холодно. Какова молярная теплота испарения льда L_0 при температуре $T_0 = -50°$C? Известны следующие справочные данные: средняя молярная теплоёмкость льда $c_1 = 35$ Дж/(моль · К), средняя молярная теплоёмкость воды $c_2 = 75{,}6$ Дж/(моль · К), молярная теплота плавления льда $L_1 = 6$ кДж/моль при температуре $T_1 = 0°$C, молярная теплота испарения воды $L_2 = 41$ кДж/моль при температуре $T_2 = 100°$C. Все процессы рассматриваются при нормальном атмосферном давлении.

Задача 4. Кондиционер

Летом в Якутске очень жарко. Когда днём температура на улице достигает $T_1 = 40°$C, кондиционер потребляет электрическую мощность $P_1 = 1$ кВт. Какую мощность P_2 потребляет кондиционер ночью, когда температура на улице уменьшается до $T_2 = 30°$C? Кондиционер поддерживает в помещении постоянную температуру $T_0 = 20°$C и работает с максимально возможной эффективностью. Электромотор кондиционера расположен снаружи помещения и имеет КПД $\eta = 80\%$. Мощность потока тепла внутрь помещения через стенки пропорциональна разности температур снаружи и внутри.

Задача 5. Полураспад лампочек

Гирлянда состоит из большого количества N одинаковых лампочек, подключенных параллельно к источнику, выдающему постоянное напряжение U, при котором каждая лампочка имеет сопротивление R и срок службы T. Какое количество энергии Q потребит гирлянда, если её включить и оставить работать до тех пор, пока не перегорят все лампочки?

Примечание. Под сроком службы подразумевается время, за которое лампочка перегорает или не перегорает с одинаковой вероятностью.

Задача 6. Магнитный спутник

Частица массой m и зарядом q стала низким экваториальным спутником планеты массой M и радиусом R без атмосферы. Географические и магнитные полюса планеты совпадают, угловая скорость её вращения вокруг своей оси равна ω, а индукция магнитного поля на экваторе равна B. Найдите период T обращения частицы-спутника в системе отсчёта планеты.

Задача 7. Глубина резкости

Объектив диаметром $D = 1$ см и фокусным расстоянием $f = 2$ см даёт на плёнке максимально резкое изображение предмета, расположенного на расстоянии a от объектива. На каких расстояниях (укажите $a_{\min}$ и $a_{\max}$) располагаются предметы, которые на том же кадре оказались изображены достаточно резко, если размер зерна плёнки (или пикселя, если бы это был цифровой фотоаппарат) равен $d = 10$ мкм? Проведите расчёты для двух частных случаев: $a_1 = 12$ м и $a_2 = 60$ м.

Старшая лига

Задача 1. Плавающие шары

Два однородных шара, имеющие одинаковый диаметр D и плотности ρ_1 и ρ_2, соединены невесомой нерастяжимой нитью длиной L и плавают в толще жидкости, плотность ρ которой зависит от глубины погружения h по формуле $\rho = \rho_0(1 + kh)$. Найдите глубины h_1 и h_2, на которых расположены центры шаров, и силу натяжения T нити в положении равновесия.

Задача 2. Трение по максимуму

Горизонтальная плоскость разделена на две полуплоскости — гладкую и шероховатую. Однородная линейка массой m и длиной L, скользившая со скоростью v_0 по гладкой части вдоль прямой, перпендикулярной границе раздела, наезжает на шероховатую часть с коэффициентом трения μ. Найдите максимальный модуль мощности $N_{\max}$ силы трения, действующей на линейку, и момент времени $t_{\max}$, когда он достигается, считая от начала пересечения линейкой границы между полуплоскостями.

Задача 3. Вода и пар

В жёстком сосуде находится вода массой $m_0 = 11$ г и её насыщенный пар массой $m = 10$ г при температуре $T = 100°$C. Найдите общую теплоёмкость C системы. При температуре T известны удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг $\cdot$ °C) и удельная теплота испарения воды $\lambda = 2{,}3$ МДж/кг, а малые относительные изменения давления $\Delta P/P$ и температуры $\Delta T/T$ насыщенного пара связаны соотношением $\Delta P/P = \alpha \Delta T/T$, где $\alpha = 13$.

Задача 4. Силовая линия

В некоторой точке A, находящейся на большом расстоянии от однородно заряженного отрезка длиной L, вектор напряжённости электрического поля образует малый угол α с прямой, параллельной отрезку. Найдите расстояние x между ближайшим к точке A концом отрезка и точкой пересечения отрезка с силовой линией, проходящей через точку A.

Задача 5. Магнитный спутник

Частица массой m и зарядом q стала низким экваториальным спутником планеты массой M и радиусом R без атмосферы. Географические и магнитные полюса планеты совпадают, угловая скорость её вращения вокруг своей оси равна ω, а индукция магнитного поля на экваторе равна B. Найдите период T обращения частицы-спутника в системе отсчёта планеты.

Задача 6. Глубина резкости

Объектив диаметром $D = 1$ см и фокусным расстоянием $f = 2$ см даёт на плёнке максимально резкое изображение предмета, расположенного на расстоянии a от объектива. На каких расстояниях (укажите $a_{\min}$ и $a_{\max}$) располагаются предметы, которые на том же кадре оказались изображены достаточно резко, если размер зерна плёнки (или пикселя, если бы это был цифровой фотоаппарат) равен $d = 10$ мкм? Проведите расчёты для двух частных случаев: $a_1 = 12$ м и $a_2 = 60$ м.

Задача 7. Колебания на свету

Тонкостенный цилиндр радиусом $R = 10$ см из материала с поверхностной плотностью $\sigma = 80$ г/м^2 подвешен за центр основания на очень тонкой нити в вакууме и находится в широком горизонтальном потоке света интенсивностью $I = 1$ кВт/м^2. Боковая поверхность цилиндра разделена параллельными оси цилиндра отрезками на две половины, одна из которых отражает весь падающий свет, а вторая — поглощает. Оцените период T малых крутильных колебаний цилиндра с амплитудой $\varphi_0 = 0{,}12$.

Возможные решения

Младшая лига

Задача 1. Плавающие шары

Условие плавания в толще жидкости означает, что шары погружены целиком и не касаются дна. В силу линейности зависимости плотности жидкости от глубины и симметричности шара действующая на него сила Архимеда даже в неоднородной жидкости имеет привычный вид:

$$F = \rho V g = \frac{\pi}{6} g \rho D^3,$$

где ρ — плотность жидкости на уровне центра шара, V — объём шара.

Сперва найдём глубины x_1 и x_2 центров шаров в предположении, что шары не связаны нитью. Из условия равновесия (уравнения для силы тяжести и силы Архимеда) следует равенство плотностей шара и жидкости на уровне его центра:

$$\rho_1 = \rho_0(1 + kx_1) \qquad \text{и} \qquad \rho_2 = \rho_0(1 + kx_2),$$

откуда получаем выражения

$$x_1 = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right) \qquad \text{и} \qquad x_2 = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_2}{\rho_0} - 1\right).$$

Найденные x_1 и x_2 будут равны искомым h_1 и h_2, если в этом положении нить не натянута, то есть если $|x_1 - x_2| \leqslant L + D$, что равносильно условию $|\rho_1 - \rho_2| \leqslant k(L+D)\rho_0$. В противном случае применим тот же подход (равенство плотностей) для нахождения глубины h_0 середины натянутой нити:

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \rho_0(1 + kh_0),$$

откуда получаем формулу

$$h_0 = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_0} - 1\right).$$

Искомые положения центров шаров найдём геометрически:

$$h_{1,2} = h_0 \pm \Delta h = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_0} - 1\right) \pm \frac{L + D}{2},$$

где Δh — расстояние от середины нити до центра любого шара, а выбор знака зависит от плотности шара: для тяжёлого — плюс, а для лёгкого — минус.

Силу натяжения нити найдём из условия равновесия одного из шаров, например, верхнего:

$$T = \rho_0(1 + k(h_0 - \Delta h))Vg - \min(\rho_1;\rho_2)\cdot Vg =$$

$$= \rho_0\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_0} - k\frac{L+D}{2}\right)Vg - \frac{\rho_1+\rho_2-|\rho_1-\rho_2|}{2}Vg =$$

$$= \frac{\pi g}{12}D^3\Big(|\rho_1-\rho_2| - k(L+D)\rho_0\Big).$$

Отметим, что выражение в последней паре больших скобок заведомо неотрицательно в рассматриваемом случае, когда $|\rho_1-\rho_2| \geqslant k(L+D)\rho_0$.

Таким образом, окончательный ответ имеет вид:

- если $|\rho_1-\rho_2| \leqslant k(L+D)\rho_0$, то

$$h_1 = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right),$$

$$h_2 = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_2}{\rho_0} - 1\right),$$

$$T = 0;$$

- если $|\rho_1-\rho_2| \geqslant k(L+D)\rho_0$, то

$$h_1 = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_0} - 1\right) + \frac{L+D}{2}\cdot\mathrm{sign}(\rho_1-\rho_2),$$

$$h_2 = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_0} - 1\right) + \frac{L+D}{2}\cdot\mathrm{sign}(\rho_2-\rho_1),$$

$$T = \frac{\pi g}{12}D^3\Big(|\rho_1-\rho_2| - k(L+D)\rho_0\Big).$$

Примечание. Напомним определение функции «знак»:

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0; \\ 1, & \text{если} \quad x > 0; \\ -1, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Примерная система оценивания

Вывод формулы для силы Архимеда в данной неоднородной жидкости 1
Применение условия равновесия 1
Сравнение $|\rho_1-\rho_2|$ и $k(L+D)\rho_0$ для выбора случая 1
Ответ для h_1 в первом случае 1
Ответ для h_2 в первом случае 1

Ответ для T в первом случае 1
Ответ для h_1 во втором случае 1
Ответ для h_2 во втором случае 1
Ответ для T во втором случае 2

Задача 2. Колебания на двух пружинах

Пусть k — жёсткость каждой пружины, тогда возвращающая сила при малом вертикальном смещении y груза имеет вид

$$F_y = 2ky.$$

Пусть m — масса груза, T — сила натяжения нижней пружины в положении равновесия, тогда $N = T + mg$ — сила натяжения верхней пружины, $l_1 = T/k$ и $l_2 = N/k$ — длины пружин в положении равновесия.

При малом горизонтальном смещении x груза длины пружин почти не меняются, но из-за изменения направления сил появляется возвращающая сила:

$$F_x = T\cdot\frac{x}{l_1} + N\cdot\frac{x}{l_2} = 2kx.$$

Из равенства $F_x = F_y$ следует равенство периодов малых вертикальных и горизонтальных колебаний груза, то есть искомое отношение равно единице.

Примерная система оценивания

Выражение для возвращающей силы по вертикали 2
Выражение для возвращающей силы по горизонтали 4
Ответ 4

Задача 3. Испарение льда

Напомним, что скрытой теплотой фазового перехода называется изменение внутренней энергии (без учёта работы) при фазовом переходе. Скрытую теплоту плавления и кристаллизации можно считать равной обычной, так как из-за малого различия плотностей твёрдой и жидкой фаз (и потому малого изменения объёма) можно пренебречь работой по сравнению с изменением внутренней энергии. В процессе испарения плотность и объём вещества изменяются значительно, поэтому пренебрегать работой уже нельзя, но для упрощения её расчёта можно пренебречь объёмом плотной (твёрдой или жидкой) фазы по сравнению с объёмом получившегося газа.

Обозначим через ν количество воды и запишем первое начало термодинамики для процессов испарения льда и воды:

$$\nu L_0 = U_{\text{пар},T_0} - U_{\text{лёд},T_0} + \nu RT_0, \qquad (1)$$

$$\nu L_2 = U_{\text{пар},T_2} - U_{\text{вода},T_2} + \nu RT_2. \qquad (2)$$

Внутренняя энергия является функцией состояния, поэтому можно записать цепочку преобразований:

$$U_{\text{пар},T_0} - U_{\text{лёд},T_0} = (U_{\text{лёд},T_1} - U_{\text{лёд},T_0}) + (U_{\text{вода},T_1} - U_{\text{лёд},T_1}) +$$

$$+(U_{\text{вода},T_2} - U_{\text{вода},T_1}) + (U_{\text{пар},T_2} - U_{\text{вода},T_2}) + (U_{\text{пар},T_0} - U_{\text{пар},T_2}) =$$

$$= \nu c_1(T_1 - T_0) + \nu L_1 + \nu c_2(T_2 - T_1) + (\nu L_2 - \nu RT_2) + \nu C_V(T_0 - T_2),$$

где $C_V = 3R$ — молярная теплоёмкость водяного пара при постоянном объёме, а выражение в предпоследней паре скобок получено из уравнения (2).

После подстановки этой суммы в уравнение (1), сокращения на ν и упрощения находим искомую величину:

$$L_0 = c_1(T_1 - T_0) + L_1 + c_2(T_2 - T_1) + L_2 - 4R(T_2 - T_0) = 51 \text{ кДж/моль}.$$

Примерная система оценивания

Применение первого начала термодинамики	1
Рассмотрение нагревания льда	1
Рассмотрение плавления льда	1
Рассмотрение нагревания воды	1
Рассмотрение испарения воды	1
Рассмотрение охлаждения пара	1
Учёт работы при испарении льда	1
Учёт работы при испарении воды	1
Ответ в общем виде	1
Численный ответ	1

Задача 4. Кондиционер

Указание на максимально возможную эффективность кондиционера означает, что его можно считать идеальной холодильной машиной (работающей по циклу Карно), и никак не связано с КПД его электромотора, так как они описывают разные процессы: холодильный коэффициент показывает, насколько эффективно используется механическая работа для передачи теплоты, а КПД электромотора показывает, насколько эффективно преобразуется электрическая энергия в механическую работу.

Пусть ΔT — разность температур снаружи и внутри помещения, тогда мощность потока тепла через стенки помещения имеет вид

$$q_+ = k \cdot \Delta T,$$

где k — некоторая константа. Пусть P — потребляемая кондиционером электрическая мощность, тогда мощность охлаждения имеет вид

$$q_- = x \cdot \eta \cdot P,$$

где $x = T_0/\Delta T$ — холодильный коэффициент для цикла Карно.

Из уравнения теплового баланса $q_+ = q_-$ получаем формулу

$$P = \frac{k\Delta T^2}{\eta T_0},$$

применяя которую для дневных и ночных данных, выводим пропорцию

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\Delta T_2^2}{\Delta T_1^2},$$

из которой следует окончательный ответ:

$$P_2 = \frac{(T_2 - T_0)^2}{(T_1 - T_0)^2} \cdot P_1 = 250 \text{ Вт}.$$

Примечание. Заметим, что КПД электромотора является лишним данным, призванным отвлечь внимание от холодильного коэффициента, а квадратичную зависимость потребляемой мощности от разности температур можно объяснить качественно: с ростом разности температур, во-первых, растёт поток тепла через стенки, а во-вторых, падает эффективность кондиционера.

Примерная система оценивания

Уравнение теплового баланса	1
Выражение для мощности охлаждения	1
Формула холодильного коэффициента для цикла Карно	3
Ответ в общем виде	4
Численный ответ	1

Задача 5. Полураспад лампочек

Данное в условии определение срока службы по сути совпадает с определением периода полураспада, поэтому с учётом большого изначального числа N можно записать зависимость оставшегося количества n лампочек от времени t по аналогии с законом радиоактивного распада:

$$n = N \cdot 2^{-t/T}.$$

Примечание. Полученные по этой формуле дробные значения n не противоречат физическому смыслу, так как характеризуют среднее ожидаемое (а не точное фактическое) количество оставшихся лампочек, как и, например, фраза «среднее количество детей в семье равно двум с половиной» не означает, что есть хотя бы одна семья с дробным числом детей. ☺ При больших количествах вероятностными законами можно пользоваться как точными.

Общая мощность гирлянды зависит от времени:

$$P = \frac{U^2}{R} \cdot n = \frac{NU^2}{R} \cdot 2^{-t/T},$$

поэтому для нахождения Q нужно взять интеграл:

$$Q = \int_0^\infty P dt = \frac{NU^2}{R} \int_0^\infty 2^{-t/T} dt = -\frac{NU^2T}{R\ln 2} \cdot 2^{-t/T}\Big|_0^\infty = \frac{NU^2T}{R\ln 2}.$$

Примерная система оценивания

Зависимость $n(t)$ ... 3
Формула для мощности одной лампочки ... 1
Формула для общей мощности гирлянды ... 1
Запись определённого интеграла ... 2
Ответ ... 3

Задача 6. Магнитный спутник

Из условия совпадения географических и магнитных полюсов планеты и логичного предположения о её симметричности следует, что индукция магнитного поля на экваторе направлена вдоль меридианов. Пусть v — скорость частицы, тогда на неё действует сила Лоренца $F_1 = qvB$ вдоль радиуса, а куда именно (к центру или от центра планеты) — зависит от положения полюсов, знака заряда и направления скорости частицы, поэтому будем считать скорость v положительной, когда сила Лоренца действует к центру планеты.

Запишем для частицы второй закон Ньютона $ma = F_1 + F_2$, подставив в него выражение для центростремительного ускорения $a = v^2/R$ и для силы гравитационного притяжения частицы к планете $F_2 = \gamma Mm/R^2$:

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = qvB + \frac{\gamma Mm}{R^2}.$$

Приведём это квадратное уравнение к стандартному виду

$$v^2 - \frac{qBR}{m}v - \frac{\gamma M}{R} = 0$$

и найдём его корни:

$$v = \frac{qBR}{2m} \pm \sqrt{\frac{q^2B^2R^2}{4m^2} + \frac{\gamma M}{R}}.$$

Примечание. В силу отрицательности свободного члена в приведённом квадратном уравнении можно было по теореме Виета заранее утверждать, что оно будет иметь два корня разных знаков, что полностью согласуется с физическим смыслом: частица может двигаться в противоположных направлениях с разными по модулю скоростями (из-за изменения знака силы Лоренца).

Для перехода в систему отсчёта планеты запишем закон сложения угловых скоростей с учётом неизвестного направления вращения планеты:

$$\frac{2\pi}{T} = \left|\omega \pm \frac{v}{R}\right|,$$

откуда после упрощения находим ответ:

$$T = \frac{2\pi}{\left|\omega \pm \dfrac{qB}{2m} \pm \sqrt{\dfrac{q^2B^2}{4m^2} + \dfrac{\gamma M}{R^3}}\right|},$$

в котором знаки $\pm$ могут выбираться независимо, то есть данное выражение является общей записью четырёх формул.

Примерная система оценивания

Выражение для силы Лоренца ... 1
Выражение для силы гравитации ... 1
Второй закон Ньютона ... 1
Формула для центростремительного ускорения ... 1
Рассмотрение двух случаев для модуля скорости ... 1
Формула для угловой скорости через линейную, радиус и период ... 1
Закон сложения угловых скоростей ... 1
Наличие двух случаев в законе сложения угловых скоростей ... 1
Наличие знака модуля в законе сложения угловых скоростей ... 1
Общий ответ для четырёх случаев ... 1

Задача 7. Глубина резкости

Пусть b — расстояние от объектива до плёнки, тогда по формуле тонкой линзы можно написать уравнение

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Если изображение точечного предмета оказывается на небольшом расстоянии x перед или за плёнкой, то на плёнке будет засвечено пятнышко, размер которого не должен превышать d, чтобы изображение считалось достаточно резким. Из подобия треугольников, образованных граничными лучами, прошедшими через объектив, с использованием приближения $d \ll D$ находим максимально допустимое смещение изображения из плоскости плёнки:

$$x = \frac{bd}{D}.$$

Примечание. Допустимые смещения перед и за плёнку оказались одинаковыми из-за использования приближения $d \ll D$. При применении модели тонкой линзы для расчёта реального объектива попытка различения расстояний x перед или за плёнкой была бы явным превышением точности.

Формулы тонкой линзы для предельно смещённых предметов имеют вид

$$\frac{1}{a_{\min}} + \frac{1}{b+x} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{a_{\max}} + \frac{1}{b-x} = \frac{1}{f}.$$

Решая все записанные уравнения совместно, находим ответ:

$$a_{\min} = \frac{a}{1+k}, \qquad a_{\max} = \frac{a}{1-k},$$

где для краткости введено обозначение

$$k = \frac{ad}{fD}.$$

При $k \geqslant 1$ значение $a_{\max}$ будет не определено или отрицательно, что противоречит физическому смыслу и означает, что верхней границы для значений a просто нет, то есть предметы на сколь угодно большом расстоянии будут изображены резко.

Подставляя численные данные, получаем ответы для частных случаев:

$$k_1 = 0{,}6, \qquad a_{\min} = 7{,}5\ \text{м}, \qquad a_{\max} = 30\ \text{м};$$

$$k_2 = 3, \qquad a_{\min} = 15\ \text{м}, \qquad a_{\max} = \infty.$$

Примерная система оценивания

Применение формулы тонкой линзы 2
Получение геометрического соотношения для граничных лучей 2
Ответ в общем виде 2
Численный ответ для первого случая 2
Численный ответ для второго случая 2

Старшая лига

Задача 1. Плавающие шары

См. зад. 1 мл. лиги.

Задача 2. Трение по максимуму

Сила трения скольжения пропорциональна доле линейки, находящейся на шероховатой части. Пусть x — смещение переднего конца линейки за границу между полуплоскостями, тогда сила трения имеет вид

$$F = \mu mg \cdot \frac{x}{L}, \qquad \text{если} \qquad x \leqslant L;$$

$$F = \mu mg, \qquad \text{если} \qquad x \geqslant L.$$

Искомый максимум будет на промежутке $0 < x \leqslant L$, так как при $x \leqslant 0$ трения ещё нет, а при $x > L$ мощность силы трения будет меньше, чем при $x = L$, так как при $x \geqslant L$ сила трения уже не растёт, а скорость только уменьшается, поэтому случай $x > L$ можно не рассматривать.

Запишем второй закон Ньютона:

$$ma = -\mu mg \cdot \frac{x}{L}, \qquad \text{откуда} \qquad a + \frac{\mu g}{L}x = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{\mu g/L}$. Конечно, никаких колебаний линейка совершать не будет, однако закон её движения на рассматриваемом промежутке будет таким же, как у пружинного маятника, выведенного толчком из положения равновесия.

Используя начальные значения координаты $x(0) = 0$ и скорости $v(0) = v_0$, запишем зависимости этих величин от времени:

$$x(t) = x_0 \sin \omega t,$$

$$v(t) = v_0 \cos \omega t,$$

где

$$x_0 = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{L}{\mu g}}.$$

Модуль мощности силы трения после упрощения имеет вид

$$N = F \cdot v = \frac{mv_0^2}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{L}} \sin 2\omega t.$$

Эти формулы справедливы до тех пор, пока не произойдёт одно из двух событий: либо остановка линейки до полного пересечения ею границы между полуплоскостями, либо полное пересечение линейкой этой границы.

В первом случае, возникающем при условии $x_0 \leqslant L$, что равносильно условию $v_0 \leqslant \sqrt{\mu g L}$, начальное и конечное значения мощности равны нулю, а максимум мощности наблюдается, когда $\sin 2\omega t = 1$. Отсюда находим значение максимума

$$N_{\max} = \frac{mv_0^2}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{L}}$$

и точку максимума

$$t_{\max} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{L}{\mu g}}.$$

Во втором случае, возникающем при условии $x_0 \geqslant L$, что равносильно условию $v_0 \geqslant \sqrt{\mu g L}$, линейка полностью покинет гладкую полуплоскость в момент времени

$$t_{\text{гран}} = \sqrt{\frac{L}{\mu g}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{\mu g L}}{v_0}\right),$$

имея при этом скорость

$$v_{\text{гран}} = \sqrt{v_0^2 - \mu g L}.$$

При условии $t_{\text{гран}} \geqslant t_{\max}$, что равносильно условию $v_0 \leqslant \sqrt{2\mu g L}$, максимум будет точно такой же, как и в первом случае, причём условие $v_0 \leqslant \sqrt{\mu g L}$ из первого случая полностью поглощается новым условием. При обратном условии $t_{\text{гран}} \leqslant t_{\max}$ прежний максимум не успеет реализоваться до полного перехода линейкой границы между полуплоскостями, значит, как было написано в начале решения, максимум будет в момент $t_{\text{гран}}$:

$$N_{\max} = \mu m g \cdot v_{\text{гран}} = \mu m g\sqrt{v_0^2 - \mu g L}.$$

Таким образом, окончательный ответ имеет следующий вид:

$$N_{\max} = \frac{mv_0^2}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{L}}, \qquad t_{\max} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{L}{\mu g}}, \qquad \text{если} \qquad v_0 \leqslant \sqrt{2\mu g L};$$

$$N_{\max} = \mu m g\sqrt{v_0^2 - \mu g L}, \qquad t_{\max} = \sqrt{\frac{L}{\mu g}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{\mu g L}}{v_0}\right), \qquad \text{если иначе.}$$

Примерная система оценивания

Анализ поглощённого случая $v_0 < \sqrt{\mu g L}$ (получение правильного ответа без анализа не влияющего на ответ поглощённого случая считается везением, поэтому без явного анализа балл не ставится) 1
Получение граничного условия $v_0 = \sqrt{2\mu g L}$ 1
Ответ для $N_{\max}$ в случае малых v_0 2
Ответ для $t_{\max}$ в случае малых v_0 2

Ответ для $N_{\max}$ в случае больших v_0 2
Ответ для $t_{\max}$ в случае больших v_0 2

Задача 3. Вода и пар

Искомую общую теплоёмкость будем искать по определению: как отношение подведённого количества теплоты δQ к изменению температуры dT.

Пусть V — объём пара, тогда из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$\mu P V = mRT,$$

где $\mu = 18$ кг/кмоль — молярная масса воды, $R = 8314$ Дж/(кмоль $\cdot$ К) — газовая постоянная, после дифференцирования приходим к соотношению

$$\mu V dP = RmdT + RTdm.$$

Подставляя сюда формулу $dP = \alpha P dT/T$ из условия, получаем уравнение

$$\mu V \alpha P\frac{dT}{T} = RmdT + RTdm,$$

откуда после повторного использования уравнения Менделеева-Клапейрона выражаем приращение массы пара:

$$dm = m(\alpha - 1)\frac{dT}{T}.$$

Поскольку сосуд жёсткий, объём не меняется и работа не совершается, поэтому всё подведённое количество теплоты идёт на увеличение внутренней энергии (нагревание воды и пара и испарение воды):

$$\delta Q = cm_0 dT + 3\frac{m}{\mu}RdT + \lambda dm.$$

После подстановки выражения для dm получаем ответ:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = cm_0 + \frac{3mR}{\mu} + \frac{\lambda m(\alpha - 1)}{T} = 800 \text{ Дж/К}.$$

Примерная система оценивания

Использование определения общей теплоёмкости 1
Применение уравнения Менделеева-Клапейрона 1
Выражение dm через dT 3
Выражение для δQ 3
Ответ в общем виде 1
Численный ответ 1

Задача 4. Силовая линия

На рис. 1 точка P является пересечением рассматриваемой силовой линии и отрезка BD. Применим теорему Гаусса для замкнутой поверхности, образованной силовыми линиями, исходящими из точки P, и плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно BD. Внутрь этой поверхности попал заряд $q = Q \cdot x/L$, где Q — заряд отрезка. Поток вектора напряжённости через поверхность, образованную силовыми линиями, всегда равен нулю, так как поле в каждой точке параллельно этой поверхности. Поскольку точка A расположена на большом расстоянии от отрезка, можно считать, что поле вблизи точки A совпадает с полем точечного заряда, находящегося в середине отрезка, то есть продолжение вектора напряжённости проходит через середину C отрезка, а в силу малости угла α можно полагать равенство

$$E_\perp = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot AC^2}$$

верным во всех точках круга с центром O и радиусом OA, откуда находим поток через рассматриваемую поверхность:

$$\Phi = E_\perp \cdot \pi OA^2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot AC^2} \cdot \pi(\alpha AC)^2 = \frac{Q\alpha^2}{4\varepsilon_0}.$$

Теорема Гаусса имеет вид

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

откуда после подстановки выражений для Φ и q получаем ответ:

$$x = \frac{\alpha^2 L}{4}.$$

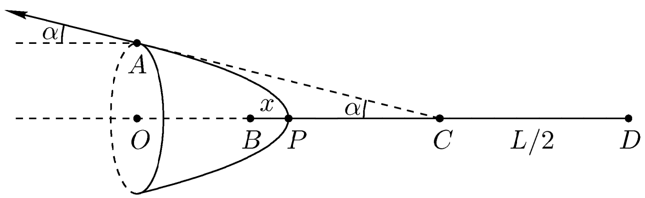


Рис. 1

Примерная система оценивания

Применение теоремы Гаусса 2
Выражение для заряда q 2
Выражение для потока Φ 3
Ответ 3

Задача 5. Магнитный спутник

См. зад. 6 мл. лиги.

Задача 6. Глубина резкости

См. зад. 7 мл. лиги.

Задача 7. Колебания на свету

Пусть цилиндр повёрнут на малый угол φ относительно положения равновесия (на рис. 2 показан вид сверху). При отражении фотонов их импульс в проекции на касательную к сечению цилиндра сохраняется, поэтому вращающего момента не возникает, а при поглощении фотонов их импульс в проекции на касательную к сечению цилиндра передаётся цилиндру, создавая вращающий момент M.

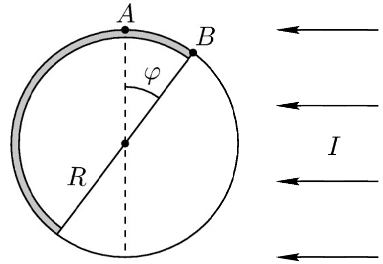


Рис. 2

В условиях $\varphi \ll 1$ можно считать, что импульс поглощённых участком AB поверхности фотонов направлен целиком по касательной и имеет плечо R относительно оси вращения цилиндра. Пусть L — высота цилиндра, тогда площадь проекции поглощающей поверхности на плоскость, перпендикулярную световому потоку, имеет вид

$$S = LR(1 - \cos\varphi) \approx \frac{LR\varphi^2}{2}.$$

Возвращающий момент M вычислим через силу давления F, импульс p и энергию E потока фотонов:

$$M = F \cdot R = \dot{p} \cdot R = \frac{\dot{E}}{c} \cdot R = \frac{IS}{c} \cdot R = \frac{ILR^2\varphi^2}{2c}.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения для цилиндра массой $m = 2\pi RL\sigma$ и моментом инерции $J = mR^2$ имеет вид

$$J \cdot \ddot{\varphi} = M,$$

откуда после подстановки с учётом направления момента получаем уравнение

$$2\pi RL\sigma R^2 \cdot \ddot{\varphi} = -\frac{ILR^2}{2c} \cdot |\varphi| \cdot \varphi,$$

которое осталось лишь записать в приведённом виде:

$$\ddot{\varphi} + \frac{I}{4\pi c\sigma R} \cdot |\varphi| \cdot \varphi = 0.$$

Полученное равенство похоже на уравнение гармонических колебаний, но всё же им не является. Решать такое нелинейное дифференциальное уравнение аналитически мы не умеем, поэтому воспользуемся тем, что по условию достаточно лишь оценить период. Будем считать, что колебания будут почти гармоническими, тогда можно заменить $|\varphi|$ на какое-нибудь среднее значение, например, среднеквадратичное, которое в случае гармонических колебаний в $\sqrt{2}$ раз меньше амплитуры φ_0. После замены получим уравнение

$$\ddot{\varphi} + \frac{I}{4\pi c\sigma R} \cdot \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} \cdot \varphi = 0,$$

решением которого являются колебания с искомым периодом:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{I}{4\pi c\sigma R} \cdot \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}}}} = 4\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi c\sigma R}{I\varphi_0}} = 3746 \text{ с} \approx 1 \text{ час}.$$

Примерная система оценивания

Конечное выражение для возвращающего момента 4
Уравнение динамики вращательного движения 2
Точное нелинейное дифференциальное уравнение 2
Адекватная численная оценка для периода 2

Junior league

Problem 1. Floating balls

Two homogeneous balls having the same diameter D and densities ρ_1 and ρ_2 are connected by a weightless, inextensible thread of length L and float in a layer of a liquid, the density ρ of which depends on an immersion depth h according to a formula $\rho = \rho_0(1 + kh)$. Find the depths h_1 and h_2, where ball centers are located, and a tension force T of the thread in an equilibrium position.

Problem 2. Oscillations on two springs

Two identical lightweight springs are attached to a small load. The second end of one of the springs is attached to a floor, and the second end of the other spring is fixed to a ceiling. In an equilibrium position, both springs are vertical and strongly stretched. Find a ratio of periods of small vertical and horizontal oscillations of the load.

Problem 3. Ice evaporation

It is very cold in Yakutia in winter. What is molar heat of evaporation of ice L_0 at a temperature $T_0 = -50°$C? The following reference data are known: an average molar heat capacity of ice $c_1 = 35$ J/(mol · K), the average molar heat capacity of water $c_2 = 75.6$ J/(mol · K), the molar melting heat of ice $L_1 = 6$ kJ/mol at the temperature $T_1 = 0°$C, the molar heat of evaporation of water $L_2 = 41$ kJ/mol at the temperature $T_2 = 100°$C. All processes are considered at normal atmospheric pressure.

Problem 4. Air conditioner

It is very hot in Yakutsk in summer. When an outdoor temperature in daytime reaches $T_1 = 40°$C, an air conditioner consumes electric power $P_1 = 1$ kW. What power P_2 does the air conditioner consume at night, when the outdoor temperature decreases to $T_2 = 30°$C? The air conditioner maintains in a room the constant temperature $T_0 = 20°$C and works with the highest possible efficiency. An electric motor of the air conditioner is located outside the room and has the efficiency $\eta =$ $= 80\%$. The power of a heat flux into the room through walls is proportional to a difference between the outside and inside temperatures.

Problem 5. Half-life of lamps

A string consists of a large number N of identical lamps connected in parallel to a source supplying a constant voltage U, wherein each lamp has a resistance R and working time T. How much energy Q will the string consume, if it is turned on and left to work until all the lamps will have burned out?

Note. The working time means the time, after which the lamp burns out or does not burn out with the same probability.

Problem 6. Magnetic satellite

A particle of mass m and charge q has become a low equatorial satellite of a planet of mass M and radius R without an atmosphere. Geographical and magnetic poles of the planet coincide, its angular speed of rotation around its axis is ω, and a magnetic induction at an equator equals B. Find a rotation period T of the satellite particle in a reference system of the planet.

Problem 7. Depth of field

A lens of diameter $D = 1$ cm and focal length $f = 2$ cm produces on a film the sharpest image of an object located at a distance a from the lens. At what distances (specify $a_{\min}$ and $a_{\max}$) are objects located, which are sufficiently sharply depicted in the same frame, if a size of a film grain (or a pixel, if it were a digital camera) is equal to $d = 10$ μm? Make calculations for two special cases: $a_1 = 12$ m and $a_2 = 60$ m.

Senior league

Problem 1. Floating balls

Two homogeneous balls having the same diameter D and densities ρ_1 and ρ_2 are connected by a weightless, inextensible thread of length L and float in a layer of a liquid, the density ρ of which depends on an immersion depth h according to a formula $\rho = \rho_0(1 + kh)$. Find the depths h_1 and h_2, where ball centers are located, and a tension force T of the thread in an equilibrium position.

Problem 2. Maximum friction

A horizontal plane is divided into two half-planes - smooth and rough. A homogeneous ruler of mass m and length L, sliding with a speed v_0 on the smooth part along a straight line perpendicular to a dividing boundary, runs into the rough part with a friction coefficient μ. Find the maximum absolute value of power $N_{\max}$ of a friction force acting on the ruler and a moment of time $t_{\max}$, when it is reached, starting from the beginning of intersection of the boundary between the half-planes by the ruler.

Problem 3. Water and vapor

In a rigid vessel there is water of mass $m_0 = 11$ g and its saturated vapor of mass $m = 10$ g at a temperature $T = 100$ °C. Find a total heat capacity C of the system. At the temperature T there are known the specific heat capacity of water $c = 4.2$ kJ/(kg·°C) and the specific heat of evaporation of water $\lambda = 2.3$ MJ/kg, and small relative changes of pressure $\Delta P/P$ and temperature $\Delta T/T$ of the saturated vapor are associated by a relationship $\Delta P/P = \alpha \Delta T/T$, where $\alpha = 13$.

Problem 4. Field line

At a point A, located at a large distance from a uniformly charged straight line segment of a length L, an electric field strength vector forms a small angle α with a straight line parallel to the segment. Find the distance x between a segment end, which is the closest one to the point A, and the point of an intersection of the segment with the field line passing through the point A.

Problem 5. Magnetic satellite

A particle of mass m and charge q has become a low equatorial satellite of a planet of mass M and radius R without an atmosphere. Geographical and magnetic poles of the planet coincide, its angular speed of rotation around its axis is ω, and a magnetic induction at an equator equals B. Find a rotation period T of the satellite particle in a reference system of the planet.

Problem 6. Depth of field

A lens of diameter $D = 1$ cm and focal length $f = 2$ cm produces on a film the sharpest image of an object located at a distance a from the lens. At what distances (specify $a_{\min}$ and $a_{\max}$) are objects located, which are sufficiently sharply depicted in the same frame, if a size of a film grain (or a pixel, if it were a digital camera) is equal to $d = 10$ μm? Make calculations for two special cases: $a_1 = 12$ m and $a_2 = 60$ m.

Problem 7. Oscillations in light

A thin-walled cylinder of radius $R = 10$ cm, made of a material with a surface density $\sigma = 80$ g/m^2, is suspended by a center of a base on a very thin thread in a vacuum and is in a wide horizontal light flux with an intensity $I = 1$ kW/m^2. A lateral surface of the cylinder is divided by segments parallel to an axis of the cylinder into two halves, one of which reflects all the incident light, and the second one absorbs it. Estimate a period T of small torsional oscillations of the cylinder with an amplitude $\varphi_0 = 0.12$.

Possible solutions

Junior league

Problem 1. Floating balls

A condition of floating in the layer of the liquid means that the balls are completely submerged and do not touch a bottom. Due to linearity of the dependence of the liquid density on the depth and symmetry of the ball, the buoyancy force acting on it even in the inhomogeneous liquid has a usual form:

$$F = \rho V g = \frac{\pi}{6} g \rho D^3,$$

where ρ is the liquid density at a level of the center of the ball, V is the ball volume.

Firstly, we find the depths x_1 and x_2 of the centers of the balls under an assumption that the balls are not connected by the thread. From the equilibrium condition (an equation for the gravity and buoyancy forces), equality of the densities of the ball and liquid at the level of its center follows:

$$\rho_1 = \rho_0(1 + kx_1) \qquad \text{and} \qquad \rho_2 = \rho_0(1 + kx_2),$$

from which we obtain expressions

$$x_1 = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right) \qquad \text{and} \qquad x_2 = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_2}{\rho_0} - 1\right).$$

The found x_1 and x_2 will be equal to the required h_1 and h_2, if the thread is not stretched in this situation, i.e. if $|x_1 - x_2| \leqslant L + D$, which is equivalent to the condition $|\rho_1 - \rho_2| \leqslant k(L + D)\rho_0$. In an opposite case, we will use the same approach (the equality of the densities) to find the depth h_0 of the middle of the stretched thread:

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \rho_0(1 + kh_0),$$

from which we get the formula

$$h_0 = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_0} - 1\right).$$

The required positions of the centers of the balls will be found geometrically:

$$h_{1,2} = h_0 \pm \Delta h = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_0} - 1\right) \pm \frac{L + D}{2},$$

where Δh is a distance from the middle of the thread to the center of any ball, and a sign choice depends on the density of the ball: a plus is for the heavy one, and a minus is for the light one.

We will find the thread tension force from the equilibrium condition of one of the balls, for example, the top one:

$$T = \rho_0(1 + k(h_0 - \Delta h))Vg - \min(\rho_1; \rho_2) \cdot Vg =$$
$$= \rho_0\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_0} - k\frac{L+D}{2}\right)Vg - \frac{\rho_1+\rho_2-|\rho_1-\rho_2|}{2}Vg =$$
$$= \frac{\pi g}{12}D^3\Big(|\rho_1-\rho_2| - k(L+D)\rho_0\Big).$$

We note that the expression in the last pair of large parentheses is certainly nonnegative in the case under consideration, when $|\rho_1 - \rho_2| \geqslant k(L + D)\rho_0$.

Thus, the final answer has the form:

- if $|\rho_1 - \rho_2| \leqslant k(L + D)\rho_0$, then

$$h_1 = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right),$$
$$h_2 = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_2}{\rho_0} - 1\right),$$
$$T = 0;$$

- if $|\rho_1 - \rho_2| \geqslant k(L + D)\rho_0$, then

$$h_1 = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_0} - 1\right) + \frac{L+D}{2}\cdot \mathrm{sign}(\rho_1-\rho_2),$$
$$h_2 = \frac{1}{k}\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_0} - 1\right) + \frac{L+D}{2}\cdot \mathrm{sign}(\rho_2-\rho_1),$$
$$T = \frac{\pi g}{12}D^3\Big(|\rho_1-\rho_2| - k(L+D)\rho_0\Big).$$

Note. We will recall a definition of the "sign" function:

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x = 0; \\ 1, & \text{if} \quad x > 0; \\ -1, & \text{if} \quad x < 0. \end{cases}$$

Grading system

A derivation of the buoyancy force formula in the given inhomogeneous liquid 1
Use of the equilibrium condition 1
A comparison of $|\rho_1 - \rho_2|$ and $k(L + D)\rho_0$ for the case choice 1
The answer for h_1 in the first case 1
The answer for h_2 in the first case 1

The answer for T in the first case 1
The answer for h_1 in the second case 1
The answer for h_2 in the second case 1
The answer for T in the second case 2

Problem 2. Oscillations on two springs

Let k be a constant of each spring, then a restoring force after a small vertical displacement y of the load has a form

$$F_y = 2ky.$$

Let m be a mass of the load, T is the tension force of the lower spring in the equilibrium position, then $N = T + mg$ is the tension force of the upper spring, $l_1 = T/k$ and $l_2 = N/k$ are lengths of the springs in the equilibrium position.

After the small horizontal displacement x of the load, the lengths of the springs almost do not vary, but due to a change in a direction of the forces, the restoring force appears:

$$F_x = T\cdot\frac{x}{l_1} + N\cdot\frac{x}{l_2} = 2kx.$$

From an equality $F_x = F_y$ it follows the equality of the periods of the small vertical and horizontal oscillations of the load, i.e. the desired ratio is equal to one.

Grading system

An expression for the vertical restoring force 2
The expression for the horizontal restoring force 4
The answer 4

Problem 3. Ice evaporation

We will recall that a change of internal energy (without taking into account work) during a phase transition is termed as the latent heat of the phase transition. The latent heat of melting and crystallization can be considered equal to the ordinary one, since the work compared to the change of the internal energy can be neglected because of a small difference between densities of the solid and liquid phases (and, therefore, the small change in volume). In the evaporation process, the density and volume of a substance change significantly, therefore, the work cannot be neglected, but, to simplify its calculation, it is possible to neglect the volume of the dense (solid or liquid) phase compared to the volume of a gas produced.

We will denote by ν an amount of water and write the first law of thermodynamics for the processes of the evaporation of ice and water:

$$\nu L_0 = U_{vapor,T_0} - U_{ice,T_0} + \nu RT_0, \tag{3}$$

$$\nu L_2 = U_{vapor,T_2} - U_{water,T_2} + \nu RT_2. \tag{4}$$

The internal energy is a function of a state, therefore, someone can write a chain of transformations:

$$U_{vapor,T_0} - U_{ice,T_0} = (U_{ice,T_1} - U_{ice,T_0}) + (U_{water,T_1} - U_{ice,T_1}) +$$
$$+ (U_{water,T_2} - U_{water,T_1}) + (U_{vapor,T_2} - U_{water,T_2}) + (U_{vapor,T_0} - U_{vapor,T_2}) =$$
$$= \nu c_1(T_1 - T_0) + \nu L_1 + \nu c_2(T_2 - T_1) + (\nu L_2 - \nu R T_2) + \nu C_V(T_0 - T_2),$$

where $C_V = 3R$ is the molar heat capacity of the water vapor at the constant volume, and an expression in the penultimate pair of parentheses is obtained from equation (4).

After a substitution of this sum into equation (3), a cancellation of ν and simplification we find the desired value:

$$L_0 = c_1(T_1 - T_0) + L_1 + c_2(T_2 - T_1) + L_2 - 4R(T_2 - T_0) = 51 \text{ kJ/mol}.$$

Grading system

Usage of the first law of thermodynamics 1
Consideration of heating of the ice 1
The consideration of the melting of the ice 1
The consideration of the heating of the water 1
The consideration of the evaporation of the water 1
The consideration of cooling of the vapor 1
Taking into account the work during the ice evaporation 1
Taking into account the work during the water evaporation 1
An answer in a general form 1
The numerical answer 1

Problem 4. Air conditioner

An indication of the maximum possible efficiency of the air conditioner means that it can be considered as an ideal cooling machine (working according to a Carnot cycle), and the indication has nothing to do with the efficiency of its electric motor, since they describe different processes: a cooling coefficient shows how effectively mechanical work is used to transfer the heat, and the efficiency of the electric motor shows how effectively the electrical energy is converted into the mechanical work.

Let ΔT be the difference between the outside and inside temperatures, then the heat flux through the walls of the room has a form

$$q_+ = k \cdot \Delta T,$$

where k is a constant. Let P be the electric power consumed by the air conditioner, then the cooling power has the form

$$q_- = x \cdot \eta \cdot P,$$

where $x = T_0/\Delta T$ is the cooling coefficient for the Carnot cycle.

From a heat balance equation $q_+ = q_-$ we obtain a formula

$$P = \frac{k \Delta T^2}{\eta T_0},$$

using which for day and night data, we obtain a proportion

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\Delta T_2^2}{\Delta T_1^2},$$

from which a final answer follows:

$$P_2 = \frac{(T_2 - T_0)^2}{(T_1 - T_0)^2} \cdot P_1 = 250 \text{ W}.$$

Note. We will note that the efficiency of the electric motor is the superfluous datum designed to divert attention from the cooling coefficient, and a quadratic dependence of the consumed power on the temperature difference can qualitatively be explained: with an increase in the temperature difference, firstly, the heat flux through the walls grows, and secondly, the efficiency of the air conditioner decreases.

Grading system

The heat balance equation 1
An expression for the cooling power 1
The formula of the cooling coefficient for the Carnot cycle 3
The answer in the general form 4
The numerical answer 1

Problem 5. Half-life of lamps

A definition of the working time given in the problem statement essentially coincides with the definition of a half-life, therefore, taking into account the large initial number N, it is possible to write a dependence of the remaining number n of the lamps on the time t by analogy with a law of radioactive decay:

$$n = N \cdot 2^{-t/T}.$$

Note. Fractional values of n obtained according to this formula do not contradict a physical meaning, since they characterize the average (and not the exact actual) number of the remaining lamps, as, for example, a phrase "the average number of children in a family is two and a half"does not mean that there is at least one family with the fractional number of children. ☺ For the large numbers the probabilistic laws can be used as exact.

Total power of the string depends on the time:

$$P = \frac{U^2}{R} \cdot n = \frac{NU^2}{R} \cdot 2^{-t/T},$$

therefore, to find Q it is necessary to take an integral:

$$Q = \int\limits_0^\infty P dt = \frac{NU^2}{R} \int\limits_0^\infty 2^{-t/T} dt = -\frac{NU^2 T}{R \ln 2} \cdot 2^{-t/T} \Big|_0^\infty = \frac{NU^2 T}{R \ln 2}.$$

Grading system

The dependence $n(t)$ 3
The formula for the power of one lamp 1
The formula for the total power of the string 1
A record of the definite integral 2
An answer 3

Problem 6. Magnetic satellite

From a condition of a coincidence of the geographical and magnetic poles of the planet and a logical assumption about its symmetry it follows that the magnetic induction at the equator is directed along meridians. Let v be the particle speed, then the Lorentz force $F_1 = qvB$ along the radius acts on it, and where exactly (to or from a center of the planet): it depends on the position of the poles, a sign of the charge and direction of a velocity of the particle, therefore, we assume that the speed v is positive, when the Lorentz force acts towards the center of the planet.

We will write Newton's second law $ma = F_1 + F_2$ for the particle, substituting in it an expression for centripetal acceleration $a = v^2/R$ and the force of gravitational attraction of the particle to the planet $F_2 = \gamma Mm/R^2$:

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = qvB + \frac{\gamma Mm}{R^2}.$$

We will bring this quadratic equation a standard form

$$v^2 - \frac{qBR}{m} v - \frac{\gamma M}{R} = 0$$

and find its roots:

$$v = \frac{qBR}{2m} \pm \sqrt{\frac{q^2 B^2 R^2}{4m^2} + \frac{\gamma M}{R}}.$$

Note. Due to negativeness of the free term in the reduced quadratic equation it would be possible to say in advance according to Vieta's theorem that it will have two roots of the different signs, which is fully consistent with a physical meaning: the particle can move in the opposite directions with the different speeds (due to a change in the sign of the Lorentz force).

For a transition to the reference system of the planet we will write the law of addition of angular speeds taking into account the unknown direction of the planet rotation:

$$\frac{2\pi}{T} = \left| \omega \pm \frac{v}{R} \right|,$$

from which after simplification we find an answer:

$$T = \frac{2\pi}{\left| \omega \pm \frac{qB}{2m} \pm \sqrt{\frac{q^2 B^2}{4m^2} + \frac{\gamma M}{R^3}} \right|},$$

wherein the signs $\pm$ can be chosen independently, i.e. this expression is a common notation of four formulas.

Grading system

The expression for the Lorentz force 1
The expression for the force of gravity 1
Newton's second law 1
The formula for the centripetal acceleration 1
Consideration of two cases for the speed 1
The formula for the angular speed using the speed, the radius and period 1
The law of addition of angular speeds 1
Presence of the two cases in the law of addition of angular speeds 1
The presence of the absolute value sign in the law of addition of angular speeds 1
The general answer for the four cases 1

Problem 7. Depth of field

Let b be the distance from the lens to the film, then according to a thin lens formula, an equation be can written

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

If the image of the point object is at the small distance x before or behind the film, then on the film a little spot will be lit, the size of which should not exceed d in order to consider the image as sufficiently sharp. From similarity of triangles formed by boundary rays passing through the lens, with the use of an approximation $d \ll D$ we find a maximum permissible image shift from a plane of the film:

$$x = \frac{bd}{D}.$$

Note. The permissible shifts before and behind the film were found to be the same due to the use of the approximation $d \ll D$. When using a thin lens model to calculate the real lens, an attempt to distinguish between the distances x before or behind the film would be an obvious excess of accuracy.

The thin lens formulas for the objects shifted to limits have forms

$$\frac{1}{a_{\min}} + \frac{1}{b + x} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{a_{\max}} + \frac{1}{b-x} = \frac{1}{f}.$$

Solving all the written equations together, we find an answer:

$$a_{\min} = \frac{a}{1+k}, \qquad a_{\max} = \frac{a}{1-k},$$

where a notation is introduced for brevity

$$k = \frac{ad}{fD}.$$

For $k \geqslant 1$ a value of $a_{\max}$ will be undefined or negative, which is contrary to a physical meaning and indicates that there is simply no upper limit for the values of a, i.e. the objects will be depicted sharply at the arbitrarily large distance.

Substituting numerical data, we obtain the answers for the particular cases:

$$k_1 = 0{,}6, \qquad a_{\min} = 7.5 \text{ m}, \qquad a_{\max} = 30 \text{ m};$$

$$k_2 = 3, \qquad a_{\min} = 15 \text{ m}, \qquad a_{\max} = \infty.$$

Grading system

The use of the thin lens formula 2
Obtainment of a geometric relationship for the boundary rays 2
The answer in the general form 2
The numerical answer for the first case 2
The numerical answer for the second case 2

Senior league

Problem 1. Floating balls

См. зад. 1 мл. лиги.

Problem 2. Maximum friction

The sliding friction force is proportional to a segment of the ruler located on the rough part. Let x be a displacement of the leading end of the ruler beyond the boundary between the half-planes, then the friction force is

$$F = \mu mg \cdot \frac{x}{L}, \qquad \text{if} \qquad x \leqslant L;$$

$$F = \mu mg, \qquad \text{if} \qquad x \geqslant L.$$

The desired maximum will be in an interval $0 < x \leqslant L$, as for $x \leqslant 0$ there is no friction yet, and for $x > L$ the power of the friction force will be less than for $x = L$, since when $x \geqslant L$, the friction force no longer grows, and the speed only decreases, therefore, it is not necessary to consider the case $x > L$.

We will write Newton's second law:

$$ma = -\mu mg \cdot \frac{x}{L}, \qquad \text{from which} \qquad a + \frac{\mu g}{L} x = 0.$$

The obtained equation coincides with the equation of oscillations with a cyclic frequency $\omega = \sqrt{\mu g / L}$. Of course, the ruler will not make any oscillations, but the law of its movement in the considered interval will be the same as one of a spring pendulum brought out from an equilibrium position by a push.

Using the initial values of the coordinate $x(0) = 0$ and speed $v(0) = v_0$, we will write dependences of these values on the time:

$$x(t) = x_0 \sin \omega t,$$

$$v(t) = v_0 \cos \omega t,$$

where

$$x_0 = \frac{v_0}{\omega} = v_0 \sqrt{\frac{L}{\mu g}}.$$

The absolute value of the friction force power after simplification has a form

$$N = F \cdot v = \frac{m v_0^2}{2} \sqrt{\frac{\mu g}{L}} \sin 2\omega t.$$

These formulas are correct until one of two events occurs: either a stop of the ruler before it completely crosses the boundary between the half-planes or the full intersection of this boundary by the ruler.

In the first case arising under a condition $x_0 \leqslant L$, which is equivalent to the condition $v_0 \leqslant \sqrt{\mu g L}$, the initial and final values of the power are equal to zero, and the power maximum is observed when $\sin 2\omega t = 1$. From this we find the maximum value

$$N_{\max} = \frac{mv_0^2}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{L}}$$

and a point of the maximum

$$t_{\max} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{L}{\mu g}}.$$

In the second case arising under the condition $x_0 \geqslant L$, which is equivalent to the condition $v_0 \geqslant \sqrt{\mu g L}$, the ruler will completely leave the smooth half-plane at the time moment

$$t_{boundary} = \sqrt{\frac{L}{\mu g}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{\mu g L}}{v_0}\right),$$

while having the speed

$$v_{boundary} = \sqrt{v_0^2 - \mu g L}.$$

Under the condition $t_{boundary} \geqslant t_{\max}$, which is equivalent to the condition $v_0 \leqslant \sqrt{2\mu g L}$, the maximum will be exactly the same as in the first case, and the condition $v_0 \leqslant \sqrt{\mu g L}$ from the first case is completely absorbed by the new condition. Under the reverse condition $t_{boundary} \leqslant t_{\max}$, the previous maximum will not have the time to be realized before a full crossing of the boundary between the half-planes by the ruler, so, as it was written at the beginning of the solution, the maximum will be at the moment $t_{boundary}$:

$$N_{\max} = \mu m g \cdot v_{boundary} = \mu m g\sqrt{v_0^2 - \mu g L}.$$

Thus, the final answer has the following form:

$$N_{\max} = \frac{mv_0^2}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{L}}, \qquad t_{\max} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{L}{\mu g}}, \qquad \text{if} \qquad v_0 \leqslant \sqrt{2\mu g L};$$

$$N_{\max} = \mu m g\sqrt{v_0^2 - \mu g L}, \qquad t_{\max} = \sqrt{\frac{L}{\mu g}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{\mu g L}}{v_0}\right), \qquad \text{if otherwise.}$$

Grading system

Analysis of the absorbed case $v_0 < \sqrt{\mu g L}$ (getting the correct answer without the analysis of the absorbed case, which does not affect the answer, is considered as luck, therefore, the point is not given without the explicit analysis) 1

Obtainment of the boundary condition $v_0 = \sqrt{2\mu g L}$ 1
The answer for $N_{\max}$ in the case of the small v_0 2
The answer for $t_{\max}$ in the case of the small v_0 2
The answer for $N_{\max}$ in the case of the large v_0 2
The answer for $t_{\max}$ in the case of the large v_0 2

Problem 3. Water and vapor

We will find the desired total heat capacity according to a definition: as a ratio of a supplied amount of heat δQ to the temperature change dT.

Let V be a vapor volume, then from the ideal gas law (the Mendeleev-Clapeyron equation)

$$\mu P V = mRT,$$

where $\mu = 18$ kg/kmol is the molar mass of water, $R = 8314$ J/(kmol $\cdot$ K) is the universal gas constant, after differentiation we arrive at the relationship

$$\mu V dP = RmdT + RTdm.$$

Substituting here a formula $dP = \alpha P dT/T$ from the problem statement, we obtain the equation

$$\mu V \alpha P \frac{dT}{T} = RmdT + RTdm,$$

from which, after a repeated use of the ideal gas law, we express a vapor mass increment:

$$dm = m(\alpha - 1)\frac{dT}{T}.$$

Since the vessel is rigid, the volume does not change and the work is not done, therefore, all the supplied heat is used for an increase of internal energy (heating of the water and vapor and evaporation of the water):

$$\delta Q = cm_0 dT + 3\frac{m}{\mu}RdT + \lambda dm.$$

After substituting an expression for dm, we get an answer:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = cm_0 + \frac{3mR}{\mu} + \frac{\lambda m(\alpha - 1)}{T} = 800 \text{ J/K}.$$

Grading system

The use of the definition of the total heat capacity 1
The use of the ideal gas law 1
The expression of dm in terms of dT 3
The expression for δQ 3
The answer in a general form 1
The numerical answer 1

Problem 4. Field line

In fig. 3, a point P is the intersection of the field line being considered and the segment BD. We will apply Gauss's law for a closed surface formed by the field lines emanating from the point P and a plane passing through the point A perpendicular to BD. A charge $q = Q \cdot x/L$ got inside this surface, where Q is the segment charge. A flux of the field strength vector through the surface formed by the field lines is always equal to zero, as the field at each point is parallel to this surface. Since the point A is located at the large distance from the segment, it can be assumed that the field near the point A coincides with the field of the point charge located in the middle of the segment, i.e. a continuation of the field strength vector passes through the middle C of the segment and due to smallness of the angle α someone can assume an equality

$$E_\perp = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot AC^2}$$

to be true at all the points of a circle with a center O and a radius OA, from which we find the flow through the considered surface:

$$\Phi = E_\perp \cdot \pi OA^2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot AC^2} \cdot \pi(\alpha AC)^2 = \frac{Q\alpha^2}{4\varepsilon_0}.$$

Gauss's law has a form

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

from which, after substituting expressions for Φ and q, we get an answer:

$$x = \frac{\alpha^2 L}{4}.$$

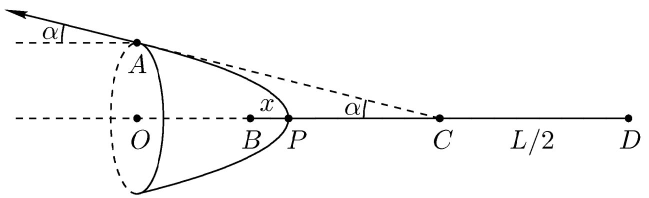


Fig. 3

Grading system

Usage of Gauss's law 2
The expression for the charge q 2
The expression for the flux Φ 3
The answer 3

Problem 5. Magnetic satellite

См. зад. 6 мл. лиги.

Problem 6. Depth of field

См. зад. 7 мл. лиги.

Problem 7. Oscillations in light

Let the cylinder be rotated by a small angle φ relative to an equilibrium position (fig. 4 shows a top view). When reflecting photons, their momentum in a projection on a tangent to a section of the cylinder is conserved, therefore, torque does not arise, and when absorbing the photons, their momentum in the projection on the tangent to the section of the cylinder is transmitted to it, creating the torque M.

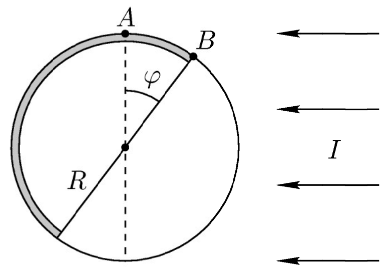


Fig. 4

With $\varphi \ll 1$ it can be assumed that the momentum of the photons absorbed by an AB part of the surface is entirely directed tangentially and has an arm R relative to the axis of rotation of the cylinder. Let L be a height of the cylinder, then an area of the projection of the absorbing surface on a plane perpendicular to the light flux has a form

$$S = LR(1 - \cos\varphi) \approx \frac{LR\varphi^2}{2}.$$

The returning torque M is calculated using a pressure force F, the momentum p and the energy E of the photon flux:

$$M = F \cdot R = \dot{p} \cdot R = \frac{\dot{E}}{c} \cdot R = \frac{IS}{c} \cdot R = \frac{ILR^2\varphi^2}{2c}.$$

The basic equation of dynamics of rotational motion for the cylinder of mass $m = 2\pi RL\sigma$ and moment of inertia $J = mR^2$ has the form

$$J \cdot \ddot{\varphi} = M,$$

from which after a substitution, taking into account a direction of the moment, we obtain the equation

$$2\pi RL\sigma R^2 \cdot \ddot{\varphi} = -\frac{ILR^2}{2c} \cdot |\varphi| \cdot \varphi,$$

which only remains to be written in the reduced form:

$$\ddot{\varphi} + \frac{I}{4\pi c\sigma R} \cdot |\varphi| \cdot \varphi = 0.$$

The resulting equality is similar to the equation of harmonic oscillations, but it is not yet. We are not able to solve analytically this nonlinear differential equation, therefore, we use the fact that according to the problem statement it is sufficient only to estimate the period. We assume that the oscillations will be almost harmonic, then $|\varphi|$ can be replaced by an average value, for example, a root mean square, which in a case of the harmonic oscillations is by a factor of $\sqrt{2}$ smaller than the amplitude φ_0. After the substitution we get the equation

$$\ddot{\varphi} + \frac{I}{4\pi c\sigma R} \cdot \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} \cdot \varphi = 0,$$

a solution of which is the oscillations with the desired period:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{I}{4\pi c\sigma R} \cdot \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}}}} = 4\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi c\sigma R}{I\varphi_0}} = 3746\text{c} \approx 1h.$$

Grading system

The final expression for the returning torque 4
The equation of dynamics of rotational motion 2
The exact nonlinear differential equation 2
The adequate numerical estimate of the period 2