МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА „ТУЙМААДА–2020“ (математика)

Первый день

Якутск 2020

Сборник содержит задачи XXVII Международной олимпиады школьников „Туймаада“ по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: С. Л. Берлов, Н. Ю. Власова, А. С. Голованов, С. В. Иванов, К. П. Кохась, А. С. Кузнецов, Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

Старшая лига

1. Верно ли, что система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \\ x_1^3 + x_2^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3 \end{cases}$$

имеет решение в целых числах, каждое из которых по модулю больше 2020?

(*A. Choudhry*)

2. Даны положительные вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$. Пусть

$$m = \min\Big(a_1 + \frac{1}{a_2},\ a_2 + \frac{1}{a_3},\ \ldots,\ a_{n-1} + \frac{1}{a_n},\ a_n + \frac{1}{a_1}\Big).$$

Докажите неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \geqslant m\,.$$

(*И. Привалов*)

3. На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку B отмечена точка D, а на продолжении AC за точку C — точка E, причем $BC = BD$ и $\angle BAD = \angle CDE$. Оказалось, что периметры треугольников ABC и ADE отличаются в два раза. Во сколько раз отличаются их площади?

(*А. Кузнецов*)

4. Для каждого натурального k обозначим через $g(k)$ наибольшее возможное число точек в плоскости, для которых попарные расстояния принимают всего лишь k различных значений. Докажите, что существует k, для которого

$$g(k) > 2k + 2020.$$

(*Фольклор*)

Младшая лига

1. Для каждого натурального числа m обозначим через t_m наименьшее натуральное число, на которое m не делится. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $m + t_m$.

(*А. Голованов*)

2. Все ненулевые коэффициенты многочлена $f(x)$ равны 1, а сумма коэффициентов равна 20. Могут ли 13 коэффициентов многочлена $f^2(x)$ оказаться равны 9?

(*С. Иванов, К. Кохась*)

3. В полном графе на 101 вершине на каждом ребре поставлено число $+1$ или -1. Известно, что сумма чисел на всех ребрах по модулю меньше 150. Докажите, что в графе найдется путь с нулевой суммой чисел на ребрах, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу.

(*Y. Caro, A. Hansberg, J. Lauri, C. Zarb*)

4. См. задачу 3 старшей лиги.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

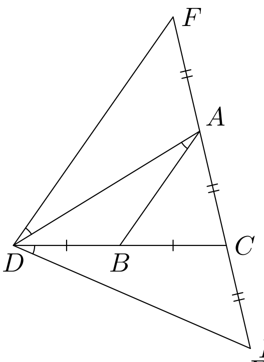
Старшая лига

1. Ответ: Да.

Любая пифагорова тройка $a^2 + b^2 = c^2$ дает решение $(c, -c, a, -a, b, -b)$. Достаточно взять $a = 2020 \cdot 3$, $b = 2020 \cdot 4$, $c = 2020 \cdot 5$.

2. Пусть $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$. Существует такое $1 \leqslant i \leqslant n$, что $a_i \leqslant a$, $a_{i+1} \geqslant a$ (индексы рассматриваем по модулю n). Чтобы найти такое i, найдем какое-нибудь $a_j \leqslant a$, и будем увеличивать индекс до тех пор, пока не встретим число, которое больше либо равно a. Очевидно, $m \leqslant a_i + \frac{1}{a_{i+1}} \leqslant a + \frac{1}{a}$, что и требовалось доказать.

3. Ответ: в 4 раза.

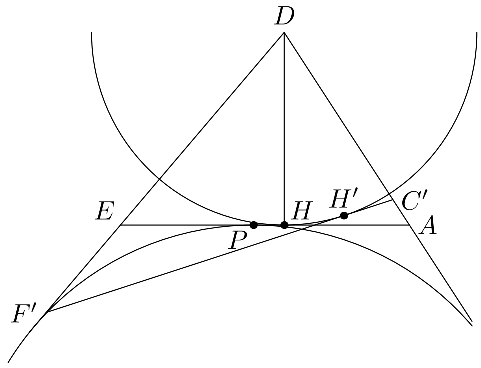


Так как треугольник ABC лежит внутри треугольника ADE, то $2P(ABC) = P(ADE)$. Отметим точку F на продолжении CA за точку A так, что $CA = AF$. Тогда $P(CDF) = 2P(ABC) = P(ADE)$, и $\angle ADF = \angle BAD = \angle CDE$. Таким образом, в треугольниках CDF и ADE равны периметры, углы при вершине D и высоты из этой вершины. По лемме (см. ниже) из этого следует, что сами треугольники равны. Тогда $S(ADE) = S(CDF) = 4S(ABC)$.

Лемма. Пусть в треугольниках ADE и CDF совпадают углы при вершине D, высоты, проведенные из вершины D, и периметры. Тогда треугольники ADE и CDF равны.

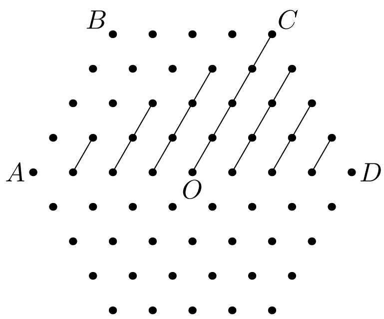
Доказательство 1. Пусть угол при вершине D равен α, высота из вершины D равна h_a, полупериметр равен p. Обозначим через a сторону, лежащую напротив угла α, через r радиус вписанной окружности треугольника, через S площадь треугольника. Тогда $(p-a)/r = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $a/r = 2S/rh_a = 2p/h_a$. Отсюда находим, что $p/r = \cot\frac{\alpha}{2} + 2p/h_a$. Таким оразом, r восстанавливается однозначно по p, α, и h_a, а тогда и a восстанавливается однозначно. Осталось заметить, что треугольник восстанавливается однозначно по стороне, высоте к ней и противолежащему углу: нарисуем дугу окружности, с которой сторона видна под углом α, и пересечем ее с прямой, параллельной стороне a и проходящей на расстоянии h_a от нее.

Доказательство 2. Пусть, не умаляя общности, $AD \leqslant DE$ и $CD \leqslant DF$. Отметим на лучах DA и DE точки C' и F' соответственно так, что $DC' = DC$, $DF' = DF$ (тогда $\Delta C'DF' = \Delta CDF$). Пусть H и H' — основания высот из вершины D треугольников ADE и $C'DF'$ соответственно. В силу неравенств на стороны точки H и H' лежат в той же полуплоскости относительно биссектрисы угла D, что и луч DA. Пусть, не умаляя общности, луч DH ближе к биссектрисе, чем луч DH' (если эти лучи совпали, то совпали и треугольники). Докажем, что $P(ADE) < P(C'DF')$. Точки H и H' лежат на окружности с центром D радиуса DH, причем AE и $C'F'$ — касаются этой окружности в точках H и H'. Точка H' лежит в той же полуплоскости относительно DH, что и точка A, поэтому касательная в точке H' пересекает прямую AE на луче HA (точка пересечения лежит на биссектрисе угла HDH'). А точка касания вневписанной окружности треугольника ADE со стороной AE лежит на луче HE (так как $AD \leqslant DE$). Обозначим эту точку через P. Вневписанные окружности треугольников ADE и $C'DF'$ гомотетичны с центром D. При этом точки P и D лежат с одной стороны от $C'F'$, а вневписанная окружность треугольника $C'DF'$ — с другой. Из этого следует, что вневписанная окружность треугольника $C'DF'$ больше вневписанной окружности треугольника ADE, а тогда и периметр $C'DF'$ больше периметра ADE (отрезки касательных из вершины D равны полупериметрам соответствующих треугольников).



4. В качестве примера конфигурации возьмем узлы треугольной решетки, лежащие в правильном шестиугольнике (внутри и на границе) с стороной длины $n-1$. На стороне такого шестиугольника помещается ровно n узлов, и, как нетрудно подсчитать, весь шестиугольник содержит $3n^2 - 3n + 1$ узлов.

Оценим сверху количество попарных расстояний между узлами шестиугольника. Рассмотрим отрезок, соединяющий два узла, лежащих в шестиугольнике, — он реализует одно из возможных попарных расстояний. Параллельно перенесем отрезок так, чтобы один из его концов оказался в вершине шестиугольника, обозначим эту вершину A, а второй конец отрезка обозначим через X. Центр шестиугольника обозначим через O. Большая диагональ шестиугольника, проведенная из вершины A, делит его на две половины, отрезок AX лежит в одной из половин, обозначим ее $ABCD$. Четырехугольник $ABCD$ разбивается на параллелограмм $ABCO$ и правильный треугольник COD. Если точка X лежит в параллелограмме, то не умаляя общности (поскольку нас интересует только длина отрезка AX) мы можем считать, что точка X находится в треугольнике ACO. Очевидно, этот треугольник содержит



$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

узлов (считаем узлы на линиях, параллельных стороне CO) — все это возможные положения точки X. Если же точка X лежит в треугольнике COD, мы имеем здесь

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

возможных узлов-положений (узлы на стороне OC учтены в предыдущем вычислении). Итого, имеется $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$ возможных положений точки X.

Таким образом, $N = 3n^2 - 3n + 1$ узлов шестиугольника определяют не более $k = n^2$ попарных расстояний. Ясно, что при больших n выполняется неравенство $N > 2k + 2020$.

Младшая лига

1. В таком виде невозможно представить, например степени двойки. Действительно, если
$$2^k = m + t_m,$$
то число m должно быть четным (поскольку $t_m = 2$ для нечетных m и тогда правая часть нечетна), пусть $m = 2^n \cdot d$, где d — нечетно, $n < k$. Чтобы результат $m + t_m$ получился степенью двойки, число t_m должно быть кратно 2^n (и больше 2^n, так как m делится на 2^n). Но тогда, $t_m = 2^{n+1}$ и $m + t_m = 2^n(2 + d) \neq 2^k$.

2. Ответ: это невозможно.

Предположим, что нашелся такой многочлен
$$f(x) = x^{d_1} + x^{d_2} + \ldots + x^{d_{20}}.$$
Тогда $f^2(x) = \sum x^{2d_i} + \sum\limits_{i<j} 2x^{d_i+d_j}$. Из этого следует, что в этом многочлене нечетный коэффициент может быть только при одночлене вида x^{2d_ℓ}. Пусть коэффициент при x^{2d_ℓ} оказался равен 9. Тогда существуют 4 пары $i < j$ такие, что $d_i + d_j = 2d_\ell$. Для любой такой пары выполняется неравенство $d_i > d_\ell > d_j$. Следовательно, существуют хотя бы 4 показателя степени, большие d_ℓ, и хотя бы 4 показателя степени, меньшие d_ℓ. Таким образом, $5 \leqslant \ell \leqslant 16$, то есть всего имеется не больше 12 таких коэффициентов.

3. Чтобы решить задачу, достаточно доказать, что существует гамильтонов цикл (т. е. цикл, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу), сумма чисел на ребрах которого равна ± 1. В таком цикле обязательно найдется ребро, на котором стоит $+1$, и ребро, на котором стоит -1. Выкинув одно из них, мы получим нужный путь.

Докажем, что такой цикл найдется. Будем называть суммой цикла сумму чисел на всех его рёбрах. Очевидно, сумма цикла нечётной длины — нечётна. Рёбра нашего графа можно разбить на 50 гамильтоновых циклов. (Например, расположим все вершины по кругу и будем обходить их с шагом k. Для каждого $1 \leqslant k \leqslant 50$ получим гамильтонов цикл: так как 101 — простое число, мы не сможем зациклиться, не обойдя все вершины.) Пусть сумма каждого из этих циклов не равна ± 1. Не может быть такого, что все 50 сумм больше или равны 3 или все 50 сумм меньше или равны -3, так как тогда сумма чисел на всех ребрах по модулю была бы больше или равна 150. Следовательно, найдется цикл C_1, у которого эта сумма меньше 3, а поскольку, мы предположили, что циклов с суммой ± 1 не существует, можно считать, что сумма цикла C_1 меньше или равна -3. Аналогично найдется цикл C_2, у которого сумма больше или равна 3.

Заметим, что цикл C_2 может быть получен из цикла C_1 с помощью последовательности операций «поменять местами две соседние вершины цикла». При каждой такой замене сумма цикла меняется не более чем на 4 (так как мы заменяем два ребра на два других ребра). Следовательно, при выполнении этих операций найдется «промежуточный» цикл, сумма которого равна ± 1.