МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА „ТУЙМААДА–2019“ (математика)

Второй день

Якутск 2019

Сборник содержит задачи XXVI Международной олимпиады школьников «Туймаада» по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: С. Л. Берлов, М. А. Антипов, Н. Ю. Власова, А. С. Голованов, К. П. Кохась, А. С. Кузнецов. Компьютерный макет: К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

Старшая лига

5. Существуют ли такие 6 натуральных чисел, что наибольший общий делитель каждых двух из них — простое число, не превосходящее 26, и при этом каждое такое простое число является наибольшим общим делителем каких-то двух из этих шести чисел?

(*А. Голованов*)

6. Докажите, что ни при каком натуральном n произведение

$$(1^4 + 1^2 + 1)(2^4 + 2^2 + 1) \ldots (n^4 + n^2 + 1)$$

не является точным квадратом.

(*K. Gaitanas*)

7. На прямоугольной клетчатой доске отмечено N клеток. Пусть a_i — количество отмеченных клеток в i-й строке, b_j — количество отмеченных клеток в j-м столбце. Докажите, что

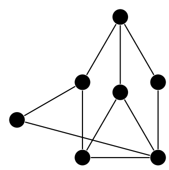
$$\prod_i a_i! \prod_j b_j! \leqslant N!$$

(*Ф. Петров*)

8. В треугольнике ABC угол при вершине B тупой, $AB \neq BC$. Точка O — центр описанной окружности ω этого треугольника, N — середина дуги ABC. Окружность, описанная около треугольника BON, пересекает отрезок AC в точках X и Y. Лучи BX и BY вторично пересекают окружность ω в точках Z и T. Докажите, что точка, симметричная точке N относительно прямой AC, лежит на прямой ZT.

(*А. Кузнецов*)

Младшая лига



5. Можно ли нарисовать на плоскости граф, изображенный на рисунке, так, чтобы вершинам соответствовали различные точки плоскости, а все ребра изображались бы отрезками единичной длины? (Отрезки могут пересекаться в точках, не являющихся вершинами.)

(*A. Globus, H. Parshall*)

Существуют ли такие 6 натуральных чисел, что наибольший общий делитель каждых двух из них — простое число, не превосходящее 26, и при этом каждое такое простое число является наибольшим общим делителем каких-то двух из этих шести чисел?

(*А. Голованов*)

7. Окружность ω касается сторон AB и BC треугольника ABC и пересекает сторону AC в точке K. Оказалось, что касательная к ω в точке K симметрична прямой AC относительно прямой BK. Чему может быть равна разность $AK - CK$, если $AB = 9$ и $BC = 11$?

(*С. Берлов*)

8. Андрей, Боря, Витя и Гена играют на доске 1000×1000. Ходят по очереди — сначала Андрей, потом Боря, затем Витя и наконец Гена, затем снова Андрей и т. д. Каждым ходом игрок должен закрасить еще незакрашенные клетки, образующие прямоугольник 2×1, 1×2, 1×3 или 3×1. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что какие-то трое ребят могут договориться и играть так, чтобы оставшийся заведомо проиграл.

(*С. Берлов, Н. Власова*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Старшая лига

5. Ответ: Да.

Вот пример таких чисел: $a = 2 \cdot 5 \cdot 7$, $b = 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$, $c = 2 \cdot 3 \cdot 19$, $d = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$, $e = 3 \cdot 5 \cdot 13$, $f = 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$. Здесь $(a, b) = 2$, $(a, c) = 2$, $(a, d) = 7$, $(a, e) = 5$, $(a, f) = 5$, $(b, c) = 2$, $(b, d) = 11$, $(b, e) = 13$, $(b, f) = 17$, $(c, d) = 3$, $(c, e) = 3$, $(c, f) = 19$, $(d, e) = 3$, $(d, f) = 23$, $(e, f) = 5$.

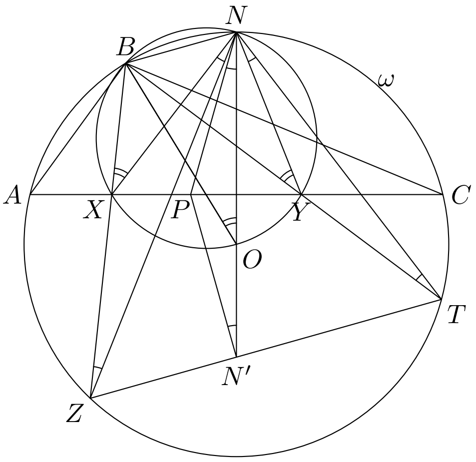
6. Пусть $f(k) = k^2 - k + 1$, тогда $f(1) = 1$, $k^2 + k + 1 = f(k + 1)$ и $k^4 + k^2 + 1 = f(k)f(k + 1)$. Следовательно,

$$(1^4 + 1^2 + 1)(2^4 + 2^2 + 1) \ldots (n^4 + n^2 + 1) =$$
$$= f(1)f(2) \cdot f(2)f(3) \cdot \ldots \cdot f(n)f(n + 1) = (f(2)f(3) \ldots f(n))^2 f(n + 1).$$

Но число $f(n+1)$ не является точным квадратом, поскольку оно лежит между двумя последовательными квадратами: $n^2 < n^2+n+1 < (n+1)^2$. Следовательно, и все произведение не является точным квадратом.

7. Пусть $A = \prod a_i!$, $B = \prod b_i!$. Чтобы доказать неравенство $AB \leqslant N!$, достаточно предъявить AB различных способов расставить в наших клетках числа от 1 до N (поскольку общее количество таких способов, очевидно, равно $N!$). На первом этапе в первой строке распределим первые a_1 чисел, во второй — следующие a_2 чисел и так далее; это можно сделать A способами. Потом как угодно переставим числа в столбцах (для каждой расстановки, полученной на первом этапе, это можно сделать B способами). Все полученные перестановки различны, поскольку на первом этапе определяется, чем заполнены столбцы (и это уже не меняется на втором этапе), а во втором — как именно заполнены.

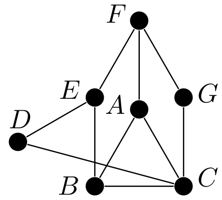
8. Не умаляя общности будем считать, что точка N лежит на дуге BC окружности ω, не содержащей точку A. Пусть $\angle BON = 2\varphi$, тогда $\angle BXN = 2\varphi = \angle BYN$, поскольку X и Y лежат на описанной окружности треугольника BON, а $\angle BZN = \varphi = \angle BTN$ как вписанные углы окружности ω. Тогда NXZ и NYT — подобные равнобедренные треугольники, так как у них равны углы $\angle XZN = \angle YTN = \varphi$ и внешние углы $\angle BXN = \angle BYN = 2\varphi$. Значит, существует поворотная гомотетия с центром в N, переводящая треугольник NXZ в треугольник NYT. Рассмотрим двойственную поворотную гомотетию h — это гомотетия с центром N, переводящая прямую XY в прямую ZT.



Обозначим через N' точку, симметричную N относительно AC, и через P — такую точку, что треугольники NXZ и NPN' подобны и одинаково ориентированы. Тогда, с одной стороны, точка P лежит на прямой XY, так как XY — серединный перпендикуляр к NN', а $PN = PN'$. С другой стороны, $h(P) = N'$ (в силу построения точки P). Так как прямая XY переходит в прямую ZT, то и точка N' лежит на ZT, что и требовалось доказать.

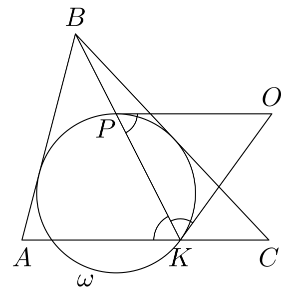
Младшая лига

5. Обозначим вершины графа, как показано на рисунке. Предположим, что нам удалось нарисовать граф на плоскости, чтобы изображение удовлетворяло условию задачи. Заметим, что вершины B и D лежат на расстоянии 1 от вершин E и C. Так как вершины B и D не могут совпадать, они лежат в разных полуплоскостях относительно прямой EC и вместе с вершинами E и C образуют ромб $DEBC$. Аналогично ромбами являются $ADEB$ и $CBEF$. Отсюда получаем, что $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CG}$, т. е. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CG}$, значит, $D = G$, что противоречит условию.



6. См. решение задачи 5 старшей лиги.

7. Ответ: 2.



Обозначим через P вторую точку пересечения прямой BK с окружностью ω. Пусть касательные к ω в точках K и P пересекаются в точке O. Тогда $\angle KPO = \angle PKO$, так как треугольник KOP — равнобедренный. Кроме того, $\angle AKP = \angle PKO$ в силу симметрии прямых KO и AC относительно прямой BK. Следовательно, $\angle KPO = \angle AKP$ и прямые PO и AC параллельны.

Рассмотрим гомотетию с центром в точке B, переводящую прямую PO в KC. При этой гомотетии окружность ω перейдет во вневписанную окружность треугольника ABC, а точка P — в K. Таким образом, K — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC с его стороной. Отсюда получаем, что $AK = p - AB$, $CK = p - BC$, где p — полупериметр треугольника ABC, то есть $AK - KC = BC - AB = 2$.

8. Первое решение. Покажем, что А, Б и Г могут объединиться против В. Первым ходом А и Б закрашивают 4 клетки, примыкающие к центру доски. Далее после каждого хода В остальные мальчики закрашивают прямоугольники, которые получаются из прямоугольника, который закрасил В, поворотами на углы 90°, 180° и 270° относительно центра доски. Легко видеть, что никакой прямоугольник, кроме тех, которые примыкают к центру квадрата, не пересекает прямоугольники, получаемые из него поворотами. Поэтому если В мог сделать свой ход, то Г, А и Б тоже могут сделать ход.

Второе решение. *Позицией* в игре будем называть доску 1000×1000, на которой закрашено некоторое множество клеток (возможно, пустое). Предположим сначала, что в нашу игру играют два игрока. Будем говорить, что позиция *выигрышная*, если игрок, который ходит из этой позиции, может победить независимо от игры соперника, и *проигрышная* — если игрок, не может сделать ход с этой позиции или любой его ход ведет в выигрышную позицию (то есть, если его соперник может своей игрой обеспечить себе победу). Докажем индукцией по числу незакрашенных клеток, что про любую позицию можно однозначно определить, является она выигрышной или проигрышной. База: все позиции, из которых нельзя сделать ход (в частности те, в которых ноль или одна незакрашенная клетка), очевидно, являются проигрышными. Переход: пусть про все позиции, в которых менее k незакрашенных клеток, мы определили, какими они являются. Рассмотрим произвольную позицию, в которой k незакрашенных клеток. Из этой позиции можно сделать ход только в позиции с меньшим числом незакрашенных клеток. Если из нее нельзя сделать ход или можно сделать ход только в выигрышные позиции, то эта позиция проигрышная. Если же из нее можно сделать ход хотя бы в одну проигрышную позицию, то она выигрышная.

Таким образом мы узнаем, выигрышной или проигрышной является исходная позиция (т. е. позиция, в которой все клетки незакрашены). Если она выигрышная, то А и В могут объединиться, чтобы гарантированно не проиграть: они просто каждый раз будут ходить из выигрышной позиции в проигрышную, а Б и Г будут вынуждены ходить из проигрышной позиции в выигрышную. Если же исходная позиция проигрышная, то аналогично могут объединиться Б и Г.

Пусть для определенности исходная позиция выигрышная (для проигрышной позиции рассуждения аналогичны). Покажем, что А и В могут объединиться с Б или Г. Для каждой выигрышной позиции зафиксируем, в какую проигрышную позицию А и В из нее будут ходить. Тем самым ходы А и В теперь определяются однозначно, и мы свели всё к игре Б и Г, которые ходят из проигрышных позиций в проигрышные. Рассмотрим эту новую игру, позициями в ней являются проигрышные позиции из предыдущей игры. Так как по-прежнему любой ход ведет в позицию с меньшим числом незакрашенных клеток, в новой игре однозначно определено, какие позиции являются проигрышными, а какие выигрышными. Тогда, если Б делает свой первый ход с позиции, выигрышной в новой игре, то А, Б и В могут объединиться против Г: А и В делают те ходы, которые мы для них зафиксировали, а Б всегда делает ход в проигрышную позицию новой игры. Если же Б делает первый ход с проигрышной позиции, то объединиться могут А, В и Г.