МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА „ТУЙМААДА–2019“ (математика)

Первый день

Якутск 2019

Сборник содержит задачи XXVI Международной олимпиады школьников „Туймаада“ по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: М. А. Антипов, Н. Ю. Власова, А. С. Голованов, К. П. Кохась, А. С. Кузнецов. Компьютерный макет: К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

Старшая лига

1. В последовательности вещественных чисел a_1, a_2, … произведение a_1a_2 отрицательно, а при $n > 2$ для вычисления a_n среди всех пар (i, j), $1 \leqslant i < j < n$, которые ранее не выбирались, выбирается одна пара (i, j), для которой $a_i + a_j$ имеет наименьшую абсолютную величину, и полагается $a_n = a_i + a_j$. Докажите, что $|a_i| < 1$ при некотором i.

(*А. Голованов*)

2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки B' и C' симметричны точкам B и C относительно прямых CD и AB соответственно. Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников ABC' и $B'CD$, равноудалена от точек A и D.

(*А. Кузнецов*)

3. План картинной галереи — клетчатая фигура, где каждая клетка — это зал, и из любой клетки можно дойти до любой другой, переходя в соседние по сторонам клетки. Смотритель, находясь в одном из залов, следит за всеми залами, в которые можно попасть из этой клетки одним ходом ферзя (не выходя за пределы галереи). Какое наименьшее число смотрителей потребуется, чтобы в любой галерее из n залов $(n > 2)$ все залы оказались под присмотром?

(*H. Alpert, É. Roldán*)

4. Калькулятор умеет возводить число в квадрат, а также умеет прибавлять 1, но при этом прибавлять 1 два раза подряд нельзя. За несколько таких операций он получил из числа x число S, причем $S > x^n + 1$ (x, n, S — натуральные). Докажите, что $S \geqslant x^n + x - 1$.

(*М. Антипов*)

Младшая лига

1. В последовательности целых чисел a_1, a_2, … произведение a_1a_2 отрицательно, а при $n > 2$ для вычисления a_n среди всех пар (i, j), $1 \leqslant i < j < n$, которые ранее не выбирались, выбирается одна пара (i, j), для которой $a_i + a_j$ имеет наименьшую абсолютную величину, и полагается $a_n = a_i + a_j$. Докажите, что $a_i = 0$ при некотором i.

(*А. Голованов*)

2. Треугольник ABC, в котором $AB < AC$, вписан в окружность ω. Окружности γ_1 и γ_2 касаются прямых AB и AC, а их центры лежат на окружности ω. Докажите, что точка C лежит на общей внешней касательной к окружностям γ_1 и γ_2.

(*А. Кузнецов*)

3. План картинной галереи — клетчатая фигура, где каждая клетка — это зал, и из любой клетки можно дойти до любой другой, переходя в соседние по сторонам клетки. Смотритель, находясь в одном из залов, следит за всеми залами, в которые можно попасть из этой клетки одним ходом ладьи (не выходя за пределы галереи). Какое наименьшее число смотрителей потребуется, чтобы в любой галерее из n залов ($n > 1$) все залы оказались под присмотром?

(*H. Alpert, É. Roldán*)

4. На Всероссийской олимпиаде разрешено награждать строго меньше 45 % участников. В олимпиаде участвовало более 20 участников. После олимпиады Власти заявили, что результаты низкие, так как доля награждённых заметно отличается от 45 %. Жюри ответило, что доля награждённых и так была максимально возможной на этой олимпиаде и даже на любой олимпиаде с меньшим числом участников. Тогда Власти приказали увеличить число участников на следующих олимпиадах с тем, чтобы доля награжденных стала хотя бы в два раза ближе к 45 %. Докажите, что количество участников потребуется увеличить хотя бы вдвое.

(*А. Голованов*)

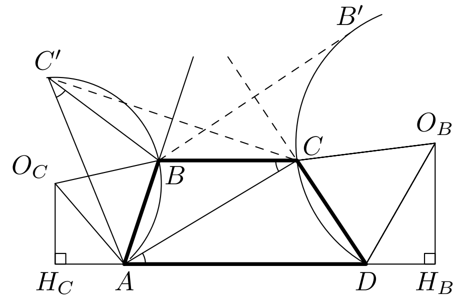
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Старшая лига

1. Предположим противное: пусть $|a_i| \geqslant 1$ при всех натуральных i. Пусть среди чисел $a_1, \ldots, a_n$ число M — наименьшее положительное, а m — наибольшее отрицательное. Докажем, что в последовательности встретится член, заключённый между $m+1$ и $M-1$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $M+m > 0$. Так как сумма $M+m$ ещё не выбиралась, a_{n+1} не превосходит её по модулю. Если a_{n+1} не попадает в нужный промежуток, оно заключено между $m+1$ и $-(M+m)$.

Может ли случиться, что все последующие члены будут заключены в промежутке $\Delta = [-(M+m), m+1]$? Если $a_i \in \Delta$ — сумма двух членов разного знака, то они оба по модулю не меньше M. Однако количество таких членов конечно, и новые не появляются. Значит, начиная с какого-то a_j, все новые члены — суммы отрицательных членов и могут быть представлены в виде суммы нескольких чисел из набора $a_1, \ldots, a_j$. Выбрав натуральное s так, что $M+m < s|m+1|$, мы можем утверждать, что в каждой такой сумме меньше s слагаемых. Однако таких сумм тоже лишь конечное количество.

Таким образом, рано или поздно длина промежутка между наименьшим отрицательным и наибольшим положительным членами уменьшится хотя бы на 1. Но это также не может продолжаться бесконечно долго, следовательно, когда-нибудь в последовательности встретится член, по модулю не превосходящий 1.



2. Обозначим через O_C и O_B центры описанных окружностей треугольников ABC' и DCB', соответственно. Спроецируем отрезок O_CO_B на прямую AD. Если мы докажем, что середина отрезка O_CO_B проецируется в середину отрезка AD, то мы решим задачу. Обозначим проекции точек O_C и O_B через H_C и H_B, соответственно. Тогда середина отрезка O_CO_B проецируется в середину отрезка H_CH_B, т. е. необходимо доказать, что середины отрезков H_CH_B и AD совпадают. Для этого докажем, что $\overrightarrow{AH_C} = \overrightarrow{H_BD}$.

Поскольку эти вектора лежат на одной прямой, достаточно проверить, что их длины равны и направления совпадают, т. е. что

$$AO_C \cos(\angle O_CAD) = DO_B \cos(\angle O_BDA).$$

Вычислим левую часть этого равенства. По теореме синусов для треугольника ABC' $AO_C = \frac{AB}{2\sin(\angle AC'B)} = \frac{AB}{2\sin(\angle ACB)}$. Далее

$$\angle O_CAD = \angle O_CAB + \angle BAD = 90^\circ - \angle AC'B + \angle BAD = \\ = 90^\circ - \angle ACB + \angle BAC + \angle CAD = 90^\circ + \angle BAC,$$

следовательно, $\cos(\angle O_CAD) = \sin(\angle BAC)$. Итого,

$$AO_C \cos(\angle O_CAD) = \frac{AB}{2\sin(\angle ACB)} \cdot \sin(\angle BAC) = \frac{BC}{2},$$

где последнее равенство — теорема синусов для треугольника ABC. Аналогично $DO_B \cos(\angle O_BDA) = \frac{BC}{2}$ и наше равенство верно.

3. Ответ: $\left[\frac{n}{3}\right]$ смотрителей.

Оценка. Покажем, что любая картинная галерея с n залами может контролироваться $\left[\frac{n}{3}\right]$ смотрителями. Выберем клетку в нашей галерее и поставим в эту клетку фишку. Если это возможно, выберем клетку, соседнюю по стороне ровно с одной другой клеткой. В противном случае у каждой клетки есть не менее двух соседей, выберем любую клетку. Далее, в каждой клетке галереи напишем расстояние от этой клетки до клетки с фишкой (расстояние — это наименьшее число шагов, которое необходимо сделать, чтобы добраться от одной клетки до другой, переходя на каждом шаге в соседнюю по стороне клетку).

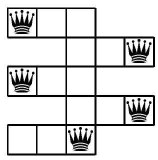
Все клетки разбились на три множества: клетки, число в которых дает остаток 1 по модулю 3, остаток 2, и остаток 0. Если в галерее нет клеток с числом, дающим остаток 2, то из клетки с фишкой просматривается вся доска. Если же клетки с остатком 2 есть, то выберем остаток, который встречается наименьшее число раз, и поставим в смотрителей в соответствующие клетки. Докажем, что при такой расстановке смотрителей *для любой клетки галереи найдется клетка со смотрителем на расстоянии не более 2 от нее.*

Если выбран остаток 0, то от любой клетки, сделав не более двух шагов назад по кратчайшему пути в сторону фишки, мы попадем в клетку с остатком 0.

Если выбран остаток 1, ту же операцию можно проделать с любой клеткой, кроме той, где стоит фишка. Но и рядом с фишкой, очевидно, имеется клетка, в которой записано число 1.

Если же выбран остаток 2, то ту же самую операцию можно проделать с любой клеткой на расстоянии два или более от фишки. Осталось проверить наше утверждение для клетки с фишкой и её соседей по стороне. Хотя бы одна из выбранных клеток содержит число 2, тогда смотритель в этой клетке находится на расстоянии 2 от фишки. Если у фишки ровно один сосед, то на расстоянии 1 от него находится тот же смотритель. Иначе, у всех клеток хотя бы по два соседа, в частности, у любой клетки, соседней с фишкой, есть соседняя клетка, где записано число 2.

Итак, у любой клетки есть смотритель на расстоянии не более 2 от нее, и тогда этот смотритель просматривает эту клетку.



Пример. Приведем пример галереи с n залами, для которой необходимо $[\frac{n}{3}]$ смотрителей. Для $n = 3m$ возьмем столбец из m клеток и к каждой клетке присоединим горизонтальную доминошку попеременно справа или слева (см. рис.). Если $n = 3m + 1$ или $n = 3m + 2$, то к примеру для $3m$ добавим еще одну или две клетки снизу от центрального столбца. Легко видеть, что в такой галерее никакие две клетки, находящиеся на расстоянии 2 от центрального столбца, не могут просматриваться одним и тем же смотрителем. Следовательно, потребуется хотя бы $[\frac{n}{3}]$ смотрителей, чтобы просматривать эту галерею.

4. Будем рассматривать все числа по модулю x^2+x+1. Если число в калькуляторе сравнимо с x, то на следующем шаге получится число, сравнимое либо с x^2, либо с $x+1 \equiv -x^2$. Из числа, сравнимого с x^2, может получиться либо число, сравнимое с $x^4 \equiv x$, либо число, сравнимое с $x^2+1 \equiv -x$. Числа, сравнимые с $-x^2$ и $-x$, в наших рассуждениях получены прибавлением единицы, поэтому далее может применяться только возведение в квадрат. При этом получатся числа, сравнимые с x и x^2, соответственно. Таким образом, при выполнении операции всегда получаются числа, сравнимые с $\pm x$ или $\pm x^2$ по модулю x^2+x+1, или, что то же самое, сравнимые с x, $x+1$, x^2 или x^2+1 по модулю x^2+x+1.

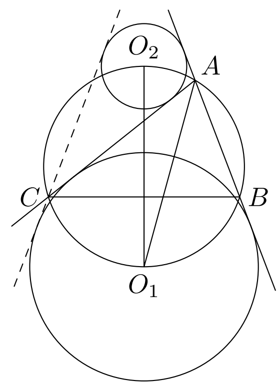
Далее заметим, что если число n имеет остаток r при делении на 3, то $x^n+1 \equiv x^r+1 \pmod{x^3-1}$, а следовательно,

$$x^n+1 \equiv x^r+1 \pmod{x^2+x+1}.$$

Таким образом, при делении на x^2+x+1 число x^n+1 может иметь только остатки 2, $x+1$ или x^2+1. С другой стороны, числа, получаемые калькулятором, могут иметь остатки x, $x+1$, x^2 или x^2+1. Легко проверить, что разность числа S, дающего остаток 2, $x+1$ или x^2+1, и меньшего числа, дающего один из остатков x, $x+1$, x^2 или x^2+1, больше либо равна $x-2$. Следовательно, если полученное калькулятором число больше x^n+1, то оно не меньше x^n+x-1.

Младшая лига

1. См. решение задачи 1 старшей лиги.

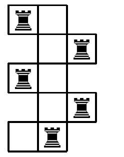


2. Обозначим через O_i центр окружности γ_i. Заметим, что точки O_1 и O_2 равноудалены от прямых AB и AC, следовательно, лежат на биссектрисах угла ABC (внутренней или внешней). Таким образом, O_1 и O_2 суть отличные от A точки пересечения биссектрис угла ABC с окружностью ω, т. е. O_1 и O_2 — середины дуг, стягиваемых хордой BC. Отсюда следует, что точки B и C симметричны относительно прямой O_1O_2 — линии центров окружностей γ_1 и γ_2, а значит, если точка B лежит на общей внешней касательной к этим окружностям, то и точка C — тоже.

3. Ответ: $[\frac{n}{2}]$ смотрителей.

Оценка. Покажем, что любая картинная галерея с n залами может контролироваться $[\frac{n}{2}]$ смотрителями. Покрасим клетки галереи в черный и белый цвета в шахматном порядке. Выберем цвет с меньшим количеством клеток и посадим в каждую клетку этого цвета по смотрителю. Тогда смотрителей будет не более $[\frac{n}{2}]$. Так как у любой клетки есть соседняя по стороне клетка другого цвета, все клетки окажутся под присмотром.

П р и м е р. Приведем пример галереи, которую не проконтролировать меньшим числом смотрителей. При четном n возьмем столбец из $n/2$ клеток и к каждой клетке столбца попеременно слева или справа присоединим одну клетку (пример для $n = 10$ изображен на рисунке). Если $n = 2m+1$ нечетно, то мы к примеру для $2m$ добавим еще одну клетку в центральный столбец. Легко видеть, что никакие две клетки, лежащие вне центрального столбца, не могут просматриваться одним и тем же смотрителем. Значит, потребуется хотя бы $\left[\frac{n}{2}\right]$ смотрителей, что и требовалось доказать.



4. Пусть q — количество участников прошедшей олимпиады, p — количество награждённых. По условию $\frac{p}{q} < \frac{9}{20}$ и между $\frac{p}{q}$ и $\frac{9}{20}$ нет дробей со знаменателем, меньшим q. На будущих олимпиадах количество участников n и количество награжденных m должны удовлетворять условиям $\frac{p}{q} < \frac{m}{n} < \frac{9}{20}$, $\frac{9}{20} - \frac{p}{q} \geqslant 2\left(\frac{9}{20} - \frac{m}{n}\right)$.

Докажем сначала следующее общее утверждение.

Л е м м а. Пусть p, q, r, $s < q$ — натуральные числа такие, что дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$ несократимы и в промежутке между ними нет ни одной дроби со знаменателем, не превосходящим q. Тогда для любой дроби $\frac{m}{n}$, заключённой между $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$, существуют натуральные x и y такие, что $m = px + ry$, $n = qx + sy$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система $m = px + ry$, $n = qx + sy$ имеет единственное решение $x = \frac{ms-nr}{ps-qr}$ и $y = \frac{pn-qm}{ps-qr}$. Найденные x и y рациональны и положительны (это становится очевидным, если переписать последние равенства в виде

$$x = \frac{n}{q} \cdot \frac{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}}{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}, \qquad y = \frac{n}{s} \cdot \frac{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}}{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}. \qquad (*)$$

Осталось доказать, что числа x и y — целые. Предположим, что это не так, и хотя бы одно из чисел $\alpha = \{x\}$, $\beta = \{y\}$ отлично от нуля. Тогда числа $m' = p\alpha + r\beta$, $n' = q\alpha + s\beta$, $m'' = p(1-\alpha) + r(1-\beta)$, $n'' = q(1-\alpha) + s(1-\beta)$ натуральны и дроби $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, ясен пень, заключены между $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$. С другой стороны, $n' + n'' = q + s < 2q$, то есть хотя бы одно из чисел n' и n'' меньше q, что противоречит сделанному предположению.

Для решения задачи применим лемму к дробям $\frac{p}{q}$ и $\frac{9}{20}$, то есть положим $r = 9$, $s = 20$. Тогда окажется, что имеют место равенства $m = px + 9y$, $n = qx + 20y$ с натуральными x и y; в частности, $x \geqslant 1$. В первом равенстве (*) второй сомножитель $\frac{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}}{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}$ не превосходит $\frac{1}{2}$, следовательно, первый сомножитель $\frac{n}{q}$ не меньше 2, что и требовалось доказать.