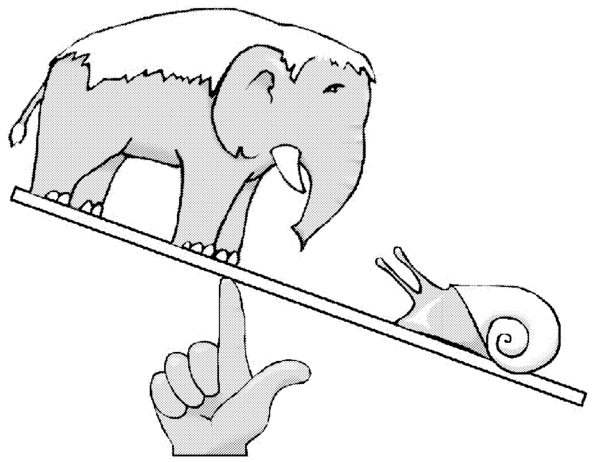
Министерство образования Республики Саха (Якутия)
Малая академия наук Республики Саха (Якутия)
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

XXV Международная олимпиада «Туймаада»

Физика

Теоретический тур

Методическое пособие



Якутск, 7–16 июля 2018 г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Министерства образования Республики Саха (Якутия)
и Северо-восточного федерального университета им. М.К. Аммосова.
Телефон: (4112) 496862.
E-mail: achudn@mail.ru, grigyum@yandex.ru.

Авторы задач

Младшая лига	Старшая лига
1. Тарнопольский Г. М.	1. Варламов С. Д.
2. Рындин М. Г.	2. Аванесян Р. Е.
3. Ефимов В. В.	3. Акимов А. Б.
4. Зильберман А. Р.	4. Муравьёв В. М.
5. Чудновский А. В.	5. Варламов С. Д.

Общая редакция — Чудновский А. В.
Перевод — Алексеев С. Н.
Оформление и вёрстка — Чудновский А. В.
Коррекция — Алексеев С. Н.
Ответственный за комплект задач — Григорьев Ю. М.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX 2_\varepsilon$.

Подписано в печать 08.07.2018 в 20:55.
677016, г. Якутск, ул. Белинского, д. 58
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

XXV Международная олимпиада «Туймаада»

Ежегодно в июле в столице Республики Саха (Якутия) — городе Якутск — проходит Международная олимпиада школьников «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии. Олимпиаду организует Министерство образования РС (Я) и Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова на базе физико-математического форума «Ленский край». В разные годы в олимпиаде принимали участие школьники из Азербайджана, Бельгии, Болгарии, Германии, Казахстана, Китая, Кыргызстана, Мексики, Монголии, Румынии, США, Таиланда,Турции, Франции, Южной Кореи и, конечно, из разных регионов России, включая Москву, Санкт-Петербург, Челябинск и другие города. Также в «Туймааде» регулярно участвуют члены сборной России и призёры заключительного этапа Всероссийских олимпиад.

Согласно действующему положению олимпиада по физике включает в себя две лиги: старшую и младшую. В старшей лиге принимают участие учащиеся выпускного и предвыпускного классов, а в младшей — все остальные школьники. Задачи старшей лиги по программе и сложности соответствуют Международной физической олимпиаде, а задачи младшей лиги — 10 классу Всероссийской олимпиады. В каждой лиге проводятся два тура: теоретический и экспериментальный.

XXV International olympiad "Tuymaada"

Every year in July in the capital of the Republic of Sakha (Yakutia), the city Yakutsk, the International School Physics, Mathematics, Informatics and Chemistry Olympiad «Tuymaada» takes place. The Olympiad is organized by the Republic Sakha's (Yakutia) Department of Education and North-Eastern Federal University n.a. M.K. Ammosov on the base of the physico-mathematical forum «Lensky District». In different years students from Azerbaijan, Belgium, Bulgaria, China, France, Germany, Kazakhstan, Kyrgyzstan, Mexico, Mongolia, Romania, South Korea, Thailand, Turkey, the USA and, of course, from different regions of Russia, including Moscow, Saint-Petersburg, Chelyabinsk and other cities, took part in the Olympiad. Also members of Russian national team and prizewinners of final stage of All-Russian Olympiads regularly participate in «Tuymaada».

According to current regulations, Physics Olympiad includes two leagues: senior league and junior league. Students of graduation and pre-graduation classes participate in senior league, all the other school students — in junior one. Senior league problems correspond in programm and difficulty to those of International Physics Olympiad, junior league problems — to those of 10th class of All-Russian Olympiad. In each league two rounds are held: theoretical one and experimental one.

Младшая лига

Задача 1. Непонятная дверь

Экспериментатор Глюк обнаружил дверь шириной H, имеющую петли и слева, и справа, причём дверь висит лишь на каких-то одних петлях (или левых, или правых), но не ясно, на каких именно. Известно, что если дверь висит на левых петлях, то она открывается под действием силы F_1 на расстоянии x_1 от левых петель, а если на правых, то — силы F_2 на расстоянии x_2 от правых петель. На каком расстоянии x от левых петель и с какой минимальной силой F нужно подействовать на дверь, чтобы она открылась независимо от того, на каких петлях она висит?

Задача 2. Самый быстрый серийный автомобиль

Автомобиль Bugatti Veyron имеет двигатель мощностью $N_1 = 1040$ л.с. и может развивать скорость $v_1 = 407$ км/ч. Другая модификация этого автомобиля имеет двигатель мощностью $N_2 = 1200$ л.с. и может развивать скорость $v_2 = 430$ км/ч. Считайте, что обе модификации обладают одинаковыми аэродинамическими свойствами, а зависимость силы сопротивления воздуха от скорости является квадратичной функцией.

1. Определите мощность N_3, необходимую для достижения скорости $v_3 = 450$ км/ч.
2. Оцените коэффициент пропорциональности k между силой сопротивления воздуха и скоростью автомобиля на малых скоростях.

Задача 3. Нагрев цилиндра с поршнем

Гладкий подвижный поршень делит горизонтальный цилиндр на две части, заполненные одноатомными идеальными газами в одинаковых состояниях. В ходе квазистатического процесса температура левого газа увеличивается в a раз, а правого — поддерживается постоянной.

1. Найдите отношение x количества теплоты, полученного левым, к отданному правым.
2. Найдите аналогичное отношение x_0 в самом начале описанного процесса.

Задача 4. Чужой среди своих

В цепи, схема которой изображена на рис. 1, идеальный источник имеет ЭДС $\mathscr{E} = 840$ В, пять из шести вольтметров имеют одинаковые сопротивления, а один вольтметр можно считать идеальным. Какое напряжение U он может показывать?

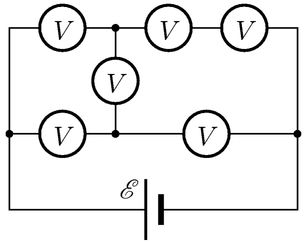


Рис. 1

Задача 5. Бегущий источник

Точечный источник света движется равноускоренно, оставаясь всё время на расстоянии h от главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием f. На каком расстоянии a от линзы будет источник, когда его скорость будет по модулю равна скорости его изображения в линзе?

Старшая лига

Задача 1. Башня из кубиков

Две одинаковые лёгкие квадратные пластины со стороной a соединены по углам четырьмя одинаковыми лёгкими пружинами жёсткостью k каждая, оси которых перпендикулярны плоскостям пластин. Одна пластина лежит на горизонтальном столе, а на вторую экспериментатор Глюк аккуратно ставит (по одному за раз) однородные кубики, каждый из которых имеет массу m и ребро a. Башня из какого максимального количества N кубиков будет сохранять устойчивость, если соседние витки пружин не касаются друг друга?

Задача 2. Вынимание шаров

В высокий сосуд с квадратным основанием со стороной a налиты несмешивающиеся жидкости плотностями w_1 и w_2, про которые известно соотношение $w_1 > w_2$. В жидкости погружены два касающихся однородных шара так, что шар плотностью ρ_1 и радиусом R_1 касается дна сосуда, шар плотностью ρ_2 и радиусом R_2 касается поверхности верхней жидкости, а общая касательная плоскость шаров совпадает с границей раздела между жидкостями. Какую минимальную работу A нужно совершить, чтобы вынуть шары из жидкостей?

Задача 3. Волшебная тепловая машина

Тепловая машина Скуперфильда работает по циклу, состоящему из двух изохор (при объёмах V и $2V$) и двух изобар (при давлениях P и $2P$), а её рабочим телом является кислород. Управляющий Крабс придумал «улучшение» (способ повысить КПД) с помощью волшебной палочки Незнайки, взмах которой позволяет мгновенно превращать весь кислород в озон (или наоборот) без изменения массы, объёма и внутренней энергии. Считайте, что в рассматриваемом диапазоне температур вращательные степени свободы молекул газов включены, а колебательные — выморожены.

1. Найдите КПД η_1 тепловой машины до «улучшения».

2a. Во сколько раз k_1 изменяется температура при описанном превращении кислорода в озон?

2b. Во сколько раз k_2 изменяется давление при описанном превращении кислорода в озон?

3. Найдите максимальный КПД η_2 тепловой машины после «улучшения».

Задача 4. Пчёлка

Пчёлка летит с постоянной скоростью v вдоль силовой линии, соединяющей равные по модулю разноимённые точечные заряды, находящиеся на расстоянии $2l$ друг от друга. Найдите ускорение a пчёлки, когда она равноудалена от зарядов, если угол между направлениями на заряды из этой точки равен γ.

Примечание. При $nx \ll 1$ справедливо приближение $(1+x)^n \approx 1 + nx$.

Задача 5. Закон отражения

Плоская электромагнитная волна длиной λ_0 падает под углом α на плоское изначально неподвижное зеркало.

1. На какой угол φ отклонится отражённая волна, когда зеркало начнёт двигаться со скоростью v перпендикулярно плоскости зеркала навстречу волне?

2. Найдите длину волны λ после отражения от движущегося зеркала, полагая найденный в предыдущем пункте угол φ известным.

Возможные решения

Младшая лига

Задача 1. Непонятная дверь

Чтобы дверь гарантированно открылась под действием силы F на расстоянии x от левых петель, должны выполняться два условия:

$$Fx \geqslant F_1 x_1,$$

$$F(H-x) \geqslant F_2 x_2,$$

откуда после сложения неравенств находим минимальную силу:

$$F = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{H}.$$

Подстановка выражения для F в первые два условия даёт два ограничения

$$x \geqslant \frac{F_1 x_1 H}{F_1 x_1 + F_2 x_2},$$

$$x \leqslant \frac{F_1 x_1 H}{F_1 x_1 + F_2 x_2},$$

из которых находим место приложения минимальной силы:

$$x = \frac{F_1 x_1 H}{F_1 x_1 + F_2 x_2}.$$

Примерная система оценивания

Ответ для F 5
Ответ для x 5

Задача 2. Самый быстрый серийный автомобиль

Квадратичная зависимость силы F сопротивления воздуха от скорости v автомобиля имеет вид

$$F(v) = av^2 + bv + c,$$

где a, b и c — некоторые коэффициенты. На покоящийся автомобиль сила сопротивления не действует, значит, $c = 0$.

Выразим зависимость мощности от скорости в виде

$$N(v) = Fv = av^3 + bv^2$$

и применим её в каждом из трёх случаев:

$$\begin{cases} N_1 = av_1^3 + bv_1^2, \\ N_2 = av_2^3 + bv_2^2, \\ N_3 = av_3^3 + bv_3^2, \end{cases}$$

откуда находим коэффициенты и искомую мощность:

$$a = \frac{v_1^2 N_2 - v_2^2 N_1}{v_1^2 v_2^2 (v_2 - v_1)} \approx 9{,}2 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{л.с.}}{(\text{км/ч})^3},$$

$$b = \frac{v_2^3 N_1 - v_1^3 N_2}{v_1^2 v_2^2 (v_2 - v_1)} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{л.с.}}{(\text{км/ч})^2},$$

$$N_3 = a v_3^3 + b v_3^2 = \frac{v_1^2 N_2 - v_2^2 N_1}{v_1^2 v_2^2 (v_2 - v_1)} \cdot v_3^3 + \frac{v_2^3 N_1 - v_1^3 N_2}{v_1^2 v_2^2 (v_2 - v_1)} \cdot v_3^2 \approx 1{,}35 \cdot 10^3 \text{ л.с.}$$

Искомый коэффициент k равен производной dF/dv при $v \approx 0$:

$$k \approx b = \frac{v_2^3 N_1 - v_1^3 N_2}{v_1^2 v_2^2 (v_2 - v_1)} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{л.с.}}{(\text{км/ч})^2}.$$

Примечание. В задаче использованы реальные параметры автомобиля: `https://ru.wikipedia.org/wiki/Bugatti_Veyron`.

Примерная система оценивания

Зависимость мощности от скорости 2
Ответ для N_3 в общем виде 2
Численный ответ для N_3 2
Ответ для k в общем виде 2
Численный ответ для k 2

Задача 3. Нагрев цилиндра с поршнем

Пусть ν — количество каждого газа, T, P_0 и V_0 — их начальные температура, давление и объём соответственно, P — их конечное давление (одинаковое, так как поршень движется без трения), V_1 и V_2 — конечные объёмы левого и правого газов соответственно, тогда из уравнения Менделеева–Клапейрона для конечных состояний газов

$$\frac{PV_1}{\nu a T} = \text{const} = \frac{PV_2}{\nu T}$$

и условия постоянства суммарного объёма газов

$$V_1 + V_2 = 2V_0$$

выразим конечный объём правого газа:

$$V_2 = \frac{2V_0}{a+1}.$$

Работу A левого газа можно найти как работу над правым газом в изотермическом процессе:

$$A = -\nu RT \ln\frac{V_2}{V_0} = \nu RT \ln\frac{a+1}{2}.$$

Из первого начала термодинамики найдём подведённое к левому и отведённое от правого газов количества теплоты Q_1 и Q_2 соответственно:

$$Q_1 = \frac{3}{2}\nu R(aT - T) + A = \nu RT\left(\frac{3}{2}(a-1) + \ln\frac{a+1}{2}\right),$$

$$Q_2 = A = \nu RT \ln\frac{a+1}{2}.$$

Таким образом, окончательный ответ имеет вид

$$x = \frac{Q_1}{Q_2} = 1 + \frac{3(a-1)}{2\ln\frac{a+1}{2}}.$$

Чтобы найти x_0, используя уже полученный результат для x, сделаем замену $a = 1 + b$, где b — бесконечно малое относительное изменение температуры левого газа, и вычислим предел:

$$x_0 = \lim_{b\to 0} x = \lim_{b\to 0}\left(1 + \frac{3b}{2\ln\left(1+\frac{b}{2}\right)}\right) = \lim_{b\to 0}\left(1 + \frac{3b}{2\cdot\frac{b}{2}}\right) = 4.$$

Примерная система оценивания

Выражение для V_2 2
Выражение для A 2
Выражение для Q_1 2
Ответ для x 1
Ответ для x_0 3

Задача 4. Чужой среди своих

Идеальный вольтметр можно заменить на разрыв в цепи, так как его сопротивление много больше других сопротивлений. В отношении каждого вольтметра проверим предположения, что он является идеальным.

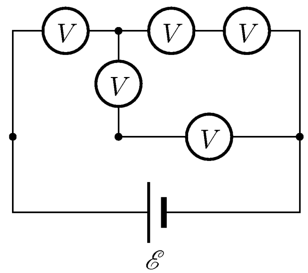


Рис. 2

Первое предположение приводит к схеме, изображённой на рис. 2. Пусть R — сопротивление вольтметров, тогда силу тока I через источник найдём по закону Ома с использованием свойств последовательного и параллельного соединений:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + \frac{2R}{2}} = \frac{\mathscr{E}}{2R}.$$

Сила тока через нижний правый вольтметр равна $I/2$, поэтому из второго правила Кирхгофа находим напряжение на идеальном вольтметре:

$$U = \mathscr{E} - \frac{I}{2}R = \frac{3}{4}\mathscr{E} = 630 \text{ В}.$$

Аналогично рассматриваем остальные предположения: $U = \frac{7}{8}\mathscr{E} = 735$ В (рис. 3), $U = \frac{1}{6}\mathscr{E} = 140$ В (рис. 4), $U = \frac{5}{7}\mathscr{E} = 600$ В (рис. 5), $U = \frac{4}{5}\mathscr{E} = 672$ В (рис. 6). Таким образом, ответ имеет вид

$$U \in \{140; 600; 630; 672; 735\} \text{ В}.$$

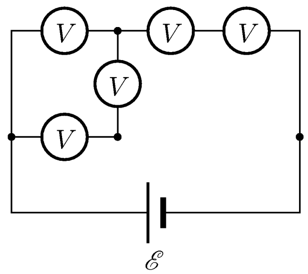


Рис. 3

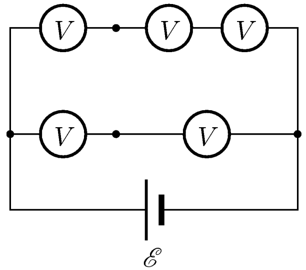


Рис. 4

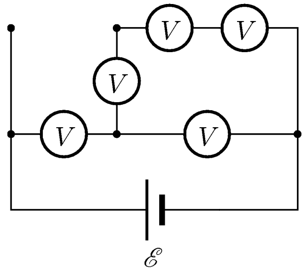


Рис. 5

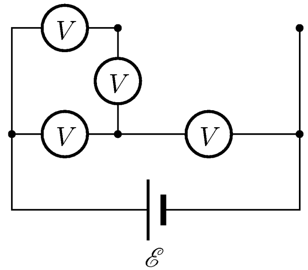


Рис. 6

Примерная система оценивания

Среди ответов есть $U = 140$ В 2
Среди ответов есть $U = 600$ В 2
Среди ответов есть $U = 630$ В 2
Среди ответов есть $U = 672$ В 2
Среди ответов есть $U = 735$ В 2

За каждое неверное значение снимается 1 балл (если оценка не становится отрицательной), например, ответ $U \in \{140; 600; 630; 672; 700\}$ В оценивается в 7 баллов, так как он содержит 4 правильных значения и 1 ошибочное.

Задача 5. Бегущий источник

Если источник движется с постоянным вектором ускорения и при этом остаётся на одном расстоянии от некоторой прямой, то он движется параллельно данной прямой.

Из формулы тонкой линзы выразим расстояние x от линзы до изображения и расстояние y от изображения до главной оптической оси:

$$x = \frac{af}{a-f}, \qquad y = -\frac{x}{a} \cdot h = \frac{fh}{f-a}.$$

Проекции v_x и v_y скорости изображения вдоль и поперёк главной оптической оси найдём путём дифференцирования координат по времени:

$$v_x = \dot{x} = -\frac{f^2\dot{a}}{(a-f)^2}, \qquad v_y = \dot{y} = \frac{fh\dot{a}}{(f-a)^2}.$$

Из условия равенства модулей скоростей источника и изображения

$$\dot{a}^2 = v_x^2 + v_y^2$$

записываем уравнение

$$\dot{a}^2 = \frac{f^4\dot{a}^2 + f^2h^2\dot{a}^2}{(a-f)^4},$$

решая которое, получаем ответ:

$$a = f + \sqrt[4]{f^2(f^2+h^2)}.$$

Примерная система оценивания

Выражение для x 2
Выражение для y 2
Выражение для v_x 1
Выражение для v_y 1
Условие равенства скоростей 1
Ответ 3

Старшая лига

Задача 1. Башня из кубиков

Поворот вокруг любой горизонтальной оси, проходящей через центр верхней пластины, можно представить в виде суперпозиции поворотов вокруг двух горизонтальных осей, проходящих через середины противоположных сторон этой пластины, поэтому достаточно исследовать устойчивость положения равновесия относительно поворота вокруг одной из таких осей.

Пусть φ — малый угол поворота верхней пластины вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон этой пластины, тогда момент силы тяжести кубиков относительно центра пластины имеет вид

$$M_1 = Nmg \cdot \frac{Na\varphi}{2} = \frac{1}{2} mga\varphi N^2,$$

а суммарный момент сил упругости всех четырёх пружин задаётся формулой

$$M_2 = 4 \cdot \left(k \cdot \frac{a\varphi}{2}\right) \cdot \frac{a}{2} = ka^2\varphi.$$

Положение равновесия будет устойчивым, если возвращающий момент M_2 будет больше отклоняющего момента M_1, то есть при условии

$$ka^2\varphi > \frac{1}{2} mga\varphi N^2, \qquad \text{откуда} \qquad N < \sqrt{\frac{2ka}{mg}}.$$

Таким образом, окончательный ответ имеет вид

$$N = \left[\sqrt{\frac{2ka}{mg}}\right],$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Примечание. Внимательный читатель мог заметить, что целая часть числа (наибольшее целое число, не превосходящее данное) может оказаться равна данному числу (а не меньше его), но эта формальная математическая неточность не играет роли, так как вероятность того, что непрерывно распределённая физическая величина примет целочисленное значение, равна нулю.

Примерная система оценивания

Рассмотрение суперпозиции двух поворотов 2
Выражение для M_1 2
Выражение для M_2 2
Получение условия $N < \sqrt{2ka/(mg)}$ 3
Ответ с указанием целой части 1

Задача 2. Вынимание шаров

Минимальная необходимая для вынимания шаров работа равна изменению потенциальной энергии системы, которая складывается из увеличения энергии шаров и уменьшения энергии жидкостей, так как их центры масс опускаются, когда жидкости занимают объём, ранее вытесненный шарами.

Если размер сосуда позволяет шарам поместиться, имея центры на одной высоте, то можно вынуть шары так, что они будут касаться поверхности верхней жидкости. Однако если сосуд слишком узкий (a меньше некоторого a_0), то центр верхнего шара будет всегда выше центра нижнего шара. Разность Δh высот центров шаров будет минимальной, когда шары касаются стенок сосуда и друг друга, то есть центр одного шара будет на расстоянии R_1 от двух перпендикулярных стенок сосуда, а центр другого — на расстоянии R_2 от двух других стенок. Поскольку расстояние между центрами касающихся шаров равно сумме их радиусов, можно записать трёхмерную теорему Пифагора:

$$\Delta h^2 + (a - R_1 - R_2)^2 + (a - R_1 - R_2)^2 = (R_1 + R_2)^2,$$

откуда находим искомое различие высот

$$\Delta h = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - 2(a - R_1 - R_2)^2}$$

и условие, при котором оно возникает:

$$a < a_0 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}(R_1 + R_2).$$

Для расчёта изменения потенциальной энергии верхнего шара потребуется разность ΔH высот нижних точек шаров:

$$\Delta H = \begin{cases} \Delta h + R_1 - R_2, & \text{если} \quad a < a_0; \\ 0, \quad \text{если} \quad a \geqslant a_0. \end{cases}$$

Из условия постоянства объёмов жидкостей выразим толщины h_1 и h_2 слоёв жидкостей после вынимания шаров:

$$h_1 = 2R_1 - \frac{4\pi R_1^3}{3a^2}, \qquad h_2 = 2R_2 - \frac{4\pi R_2^3}{3a^2},$$

используя которые, найдём изменения потенциальных энергий жидкостей:

$$\Delta W_1 = -a^2 h_1 w_1 g \left(R_1 - \frac{h_1}{2}\right),$$

$$\Delta W_2 = -a^2 h_2 w_2 g \left(2R_1 + R_2 - h_1 - \frac{h_2}{2}\right).$$

Изменения потенциальных энергий шаров имеют вид

$$\Delta E_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1 g(h_1 + h_2),$$

$$\Delta E_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 \rho_2 g(h_1 + h_2 - 2R_1 + \Delta H).$$

Запишем суммарное изменение потенциальной энергии системы:

$$\Delta E = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta E_1 + \Delta E_2.$$

Заметим, что возможна ситуация (маленький тяжёлый верхний шар в узком сосуде), когда из-за отрицательного значения ΔE_2 полное изменение ΔE тоже окажется отрицательным, однако необходимая работа не может быть отрицательной, поэтому окончательный ответ имеет вид

$$A = \max(\Delta E; 0).$$

Примерная система оценивания

Выражение для a_0 1
Выражение для Δh 1
Выражение для ΔH 1
Выражение для h_1 1
Выражение для h_2 1
Выражение для ΔW_1 1
Выражение для ΔW_2 1
Выражение для ΔE_1 1
Выражение для ΔE_2 1
Выражение для A 1

Задача 3. Волшебная тепловая машина

1. Работа A газа за цикл равна площади, ограниченной графиком цикла в PV-координатах:

$$A = PV.$$

Подведённое за цикл количество теплоты Q_1 выразим, применив первое начало термодинамики для изохорического нагревания и изобарического расширения:

$$Q_1 = \frac{5}{2}(2P \cdot 2V - P \cdot V) + 2P \cdot (2V - V) = \frac{19}{2}PV.$$

Искомый КПД найдём по определению:

$$\eta_1 = \frac{A}{Q_1} = \frac{2}{19}.$$

2. Молекула озона состоит из трёх атомов и не является линейной, а потому имеет три вращательных степени свободы. Из условия сохранения массы

при описанном превращении кислорода в озон следует, что кислород в количестве ν превращается в озон в количестве $2\nu/3$. Пусть P_1, T_1, P_2 и T_2 — давление и температура соответственно до и после превращения, V_0 — объём (одинаковый до и после превращения), тогда из условия неизменности внутренней энергии U можно записать уравнения

$$U = \frac{5}{2}\nu RT_1 = \frac{6}{2}\cdot\frac{2}{3}\nu\cdot RT_2, \qquad U = \frac{5}{2}P_1V_0 = \frac{6}{2}P_2V_0,$$

откуда

$$k_1 = \frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{4}, \qquad k_2 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{5}{6}.$$

3. При описанном превращении не совершается работа, так как не изменяется объём, что с учётом неизменности внутренней энергии означает (согласно первому началу термодинамики) отсутствие теплообмена. Однако при этом превращении газ скачкообразно переходит в новое состояние на той же изохоре, что позволяет уменьшить теплообмен с нагревателем и холодильником: в ходе повышения давления при постоянном объёме V нужно превращать озон в кислород, а в ходе понижения давления при постоянном объёме $2V$ — кислород в озон.

Из-за неизменности внутренней энергии при превращении неважно, в какой именно момент выполнять превращение, поэтому можно считать, что при объёме V озон под давлением P превращается в кислород под давлением $1{,}2P$. Подведённое за цикл количество теплоты имеет вид

$$Q_2 = \frac{5}{2}(2P \cdot 2V - 1{,}2P \cdot V) + 2P \cdot (2V - V) = 9PV.$$

Искомый КПД найдём по определению:

$$\eta_2 = \frac{A}{Q_2} = \frac{1}{9}.$$

Примечание. Превращение кислорода в озон — это эндотермическая химическая реакция, для осуществления которой нужно количество теплоты, десятой доли которого хватило бы для нагревания кислорода более чем на тысячу градусов. Если учесть это количество теплоты, КПД упадёт практически до нуля, то есть никакого «улучшения» не будет и в помине.

Примерная система оценивания

Ответ для η_1 3
Ответ для k_1 1
Ответ для k_2 1
Ответ для η_2 5

Задача 4. Пчёлка

Искомое центростремительное ускорение найдём по формуле $a = \omega v$, где ω — угловая скорость поворота вектора скорости, совпадающая с угловой скоростью поворота вектора напряжённости.

Выберем начало системы координат в середине отрезка, соединяющего заряды, ось x направим в сторону отрицательного заряда (обозначим его $-q$), а ось y — в сторону точки A, в которой находилась пчёлка, когда она была равноудалена от зарядов.

Напряжённость поля в точке A направлена вдоль оси x и имеет вид

$$E = E_x = 2 \cdot \frac{kq}{r^2} \cdot \frac{l}{r} = \frac{2kql}{r^3},$$

где r — расстояние от точки A до каждого из зарядов.

При смещении пчёлки из точки A на малое расстояние x вдоль силовой линии можно пренебречь изменением E_x, но нельзя пренебречь изменением E_y, так как до смещения эта составляющая поля была нулевой.

Обозначив через y координату точки A, выразим E_y после смещения:

$$E_y = \frac{kq}{(l+x)^2+y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}} - \frac{kq}{(l-x)^2+y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}.$$

Используя соотношение $r^2 = l^2 + y^2$ и приближённую формулу из условия, преобразуем полученное выражение:

$$E_y = \frac{kqy}{r^3} \left(\left(1 + \frac{2lx}{r^2}\right)^{-3/2} - \left(1 - \frac{2lx}{r^2}\right)^{-3/2} \right) \approx -\frac{6kqlxy}{r^5}.$$

Отсюда найдём угол поворота вектора напряжённости при смещении:

$$\varphi \approx \left| \frac{E_y}{E_x} \right| \approx \frac{3xy}{r^2}.$$

Пусть t — время смещения пчёлки, тогда можно записать выражение

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \approx \frac{3yv}{r^2} = \frac{3v}{l} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{3v}{2l} \sin\gamma,$$

где использованы формулы

$$x = vt, \qquad \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{l}{r}, \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{y}{r}.$$

Таким образом, окончательный ответ имеет вид

$$a = \frac{3v^2}{2l} \sin\gamma.$$

Примерная система оценивания

Формула для центростремительного ускорения 1
Выражение для E_x 2

Выражение для E_y 3
Выражение для φ 1
Ответ 3

Задача 5. Закон отражения

Пусть падающая волна достигла некоторых точек A и B одновременно (то есть они принадлежат одному волновому фронту, перпендикулярному направлению распространения волны) и точка A лежит на зеркале в этот момент времени (назовём его начальным), тогда отрезок AB образует с зеркалом угол α. Пусть идущий через точку B луч встретился с движущимся зеркалом в точке C через некоторое время t, тогда можно заранее для дальнейших расчётов записать $BC \perp AB$ и $BC = ct$, где c — скорость света.

Отражённая от движущегося зеркала волна будет распространяться так же, как и волна, отражённая от эквивалентного неподвижного зеркала AC, поэтому искомый угол φ равен удвоенному углу между движущимся и эквивалентным зеркалами, что позволяет решить задачу чисто геометрически.

Пусть D — основание перпендикуляра, опущенного из точки C к зеркалу в начальный момент времени, тогда справедливо $CD \perp AD$ и $CD = vt$, так как зеркало сместилось на величину DC за время t. Опустим перпендикуляр DE из точки D к отрезку AB и перпендикуляр CF из точки C к отрезку DE, запишем выражение

$$AD = \frac{ED}{\sin\alpha} = \frac{EF + FD}{\sin\alpha} = \frac{BC + CD\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{c + v\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot t$$

и найдём искомый угол:

$$\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{CD}{AD}\right) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{v\sin\alpha}{c + v\cos\alpha}\right).$$

Электромагнитную волну можно рассматривать как поток фотонов, каждый из которых имеет импульс h/λ_0 в падающей волне и h/λ в отражённой, где h — постоянная Планка. Из условия сохранения проекции импульса на плоскость зеркала

$$\frac{h}{\lambda_0} \cdot \sin\alpha = \frac{h}{\lambda} \cdot \sin(\alpha - \varphi)$$

находим длину отражённой волны:

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha}.$$

Методы СТО. Используя преобразования Лоренца из СТО (специальной теории относительности), решим эту же задачу другим способом: перейдём в систему отсчёта зеркала, изменим знак перпендикулярной зеркалу проекции импульса, вернёмся в лабораторную систему отсчёта.

Направим ось x перпендикулярно зеркалу навстречу волне, а ось y — вдоль зеркала в плоскости падения, тогда энергия и проекции импульса падающих фотонов примут вид

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0}, \qquad p_{0x} = -\frac{h\cos\alpha}{\lambda_0}, \qquad p_{0y} = \frac{h\sin\alpha}{\lambda_0}.$$

Введём обычные для СТО обозначения

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

и с помощью обратных преобразований Лоренца выразим энергию и проекции импульса падающих фотонов в системе отсчёта зеркала:

$$E_0' = \gamma(E_0 - \beta c p_{0x}) = \frac{\gamma hc}{\lambda_0}(1+\beta\cos\alpha),$$

$$p_{0x}' = \gamma\left(p_{0x} - \beta\frac{E_0}{c}\right) = -\frac{\gamma h}{\lambda_0}(\beta+\cos\alpha),$$

$$p_{0y}' = p_{0y} = \frac{h\sin\alpha}{\lambda_0}.$$

Энергия и проекции импульса отражённых фотонов в системе отсчёта зеркала имеют вид

$$E' = E_0' = \frac{\gamma hc}{\lambda_0}(1+\beta\cos\alpha),$$

$$p_x' = -p_{0x}' = \frac{\gamma h}{\lambda_0}(\beta+\cos\alpha),$$

$$p_y' = p_{0y}' = \frac{h\sin\alpha}{\lambda_0}.$$

С помощью прямых преобразований Лоренца выразим эти же величины в лабораторной системе отсчёта:

$$E = \gamma(E' + \beta c p_x') = \frac{\gamma^2 hc}{\lambda_0}(1+2\beta\cos\alpha+\beta^2),$$

$$p_x = \gamma\left(p_x' + \beta\frac{E'}{c}\right) = \frac{\gamma^2 h}{\lambda_0}(2\beta + (1+\beta^2)\cos\alpha),$$

$$p_y = p_y' = \frac{h\sin\alpha}{\lambda_0}.$$

Отсюда находим искомые величины (значение p_x не участвует в расчётах и было выписано выше лишь для красоты):

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{\lambda_0}{\gamma^2(1+2\beta\cos\alpha+\beta^2)} = \frac{\lambda_0(c^2-v^2)}{c^2+2cv\cos\alpha+v^2},$$

$$\varphi = \alpha - \arcsin\left(\frac{p_y c}{E}\right) = \alpha - \arcsin\left(\frac{(c^2-v^2)\sin\alpha}{c^2+2cv\cos\alpha+v^2}\right).$$

Можно убедиться, что эти выражения могут быть преобразованы к виду, в котором были получены ответы геометрическим способом.

Примерная система оценивания

Идея замены движущегося зеркала на эквивалентное неподвижное 2
Ответ для φ 4
Закон сохранения проекции импульса 1
Ответ для λ 3

Junior league

Problem 1. Strange door

Gluck the experimenter found a door with a width H, having hinges both on the left and on the right, and the door hangs only on some hinges (either on the left or on the right ones), but it is not clear, on which ones. It is known that if the door hangs on the left hinges, then it is opened under action of a force F_1 at a distance x_1 from the left hinges, and if it hangs on the right hinges, then it is opened under the action of the force F_2 at the distance x_2 from the right ones. At what distance x from the left hinges and with what minimum force F it is necessary to act on the door, so that it opens independently of which hinges it hangs on?

Problem 2. Fastest production car

A Bugatti Veyron car has an engine with a capacity $N_1 = 1040$hp and can develop a speed $v_1 = 407$ km/h. Another modification of this car has the engine with the capacity $N_2 = 1200$hp and can develop the speed $v_2 = 430$ km/h. Consider that both modifications have the same aerodynamic properties, and dependence of an air drag force on the speed is a quadratic function.

1. Determine the capacity N_3, which is necessary to reach the speed $v_3 = 450$ km/h.

2. Estimate a proportionality coefficient k between the air drag force and the speed of the car at low speeds.

Problem 3. Heating of cylinder with piston

A smooth movable piston divides a horizontal cylinder into two parts filled with monatomic ideal gases in the same states. During a quasi-static process, a temperature of the left gas increases by a factor of a, and the temperature of the right gas is maintained constant.

1. Find a ratio x of an amount of heat received by the left gas to the amount of heat removed from the right one.

2. Find a similar relation x_0 at the very beginning of the described process.

Problem 4. Stranger among his own

In a circuit, a diagram of which is represented in fig. 7, an ideal source has an electromotive force $\mathscr{E} = 840$ V, five of six voltmeters have the same resistance, and one voltmeter can be considered as the ideal one. What voltage U can it show?

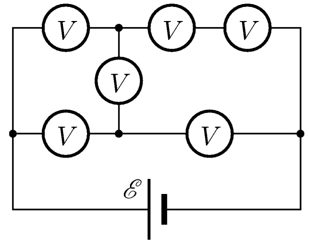


Fig. 7

Problem 5. Running source

A point source of light moves uniformly accelerated, remaining all the time at a distance h from a main optical axis of a collecting lens with a focal length f. At what distance a from the lens will the source be, when an absolute value of its velocity will be equal to a speed of its image in the lens?

Senior league

Problem 1. Tower of small cubes

Two identical lightweight square plates with a side a are connected at angles with four identical lightweight springs of stiffness k each, whose axes are perpendicular to planes of the plates. One plate lies on a horizontal table, and Gluck the experimenter accurately puts on the second plate (one at a time) homogeneous small cubes, each of which has a mass m and edge a. A tower of what maximum number N of the small cubes will remain stable, if neighboring coils of the springs do not touch each other?

Problem 2. Removal of balls

In a tall vessel with a square base with a side a, there are immiscible liquids of densities w_1 and w_2, about which a relation is known $w_1 > w_2$. In the liquid, two touching uniform balls are immersed so that the ball of the density ρ_1 and radius R_1 touches a bottom of the vessel, the ball of the density ρ_2 and radius R_2 touches a surface of the upper liquid, and a common tangent plane of the balls coincides with the boundary surface between the liquids. What minimum work A should be done to remove the balls from the liquids?

Problem 3. Magic heat engine

Skuperfield's heat engine works according to a cycle consisting of two isochors (for volumes V and $2V$) and two isobars (at pressures P and $2P$), and its working body is oxygen. A manager Krabs came up with an "improvement"(a way to increase efficiency) with the help of Dunno's magic wand, a sweep of which allows someone to instantaneously convert all the oxygen into ozone (or vice versa) without a change of mass, volume and internal energy. Consider that in a temperature range under consideration, rotational degrees of freedom of gas molecules are included, and the vibrational ones are freezed.

1. Find the efficiency η_1 of the heat engine before the "improvement".

2a. By how many times k_1 does the temperature change during the described oxygen conversion into the ozone?

2b. By how many times k_2 does the pressure change during the described oxygen conversion into the ozone?

3. Find the maximum efficiency η_2 of the heat engine after the "improvement".

Problem 4. Little bee

A little bee flies with a constant velocity v along a line of force, which connects opposite and equal in absolute value point charges located at a distance $2l$ from each other. Find an acceleration a of the bee, when it is equidistant from the charges, if an angle between directions to the charges from this point is γ.

Note. For $nx \ll 1$ an approximation $(1+x)^n \approx 1 + nx$ is valid.

Problem 5. Law of reflection

A plane electromagnetic wave of a length λ_0 falls at an angle α on a plane initially fixed mirror.

1. At what angle φ will the reflected wave deviate, when the mirror starts moving with a speed v perpendicular to the plane of the mirror towards the wave?

2. Find the wavelength λ after a reflection from the moving mirror, assuming the angle φ found in the previous section to be known.

Possible solutions

Junior league

Problem 1. Strange door

In order that the door is reliably opened under the action of the force F at the distance x from the left hinges, two conditions must be met:

$$Fx \geqslant F_1x_1,$$

$$F(H-x) \geqslant F_2x_2,$$

from which, after adding the inequalities, we find the minimum force:

$$F = \frac{F_1x_1 + F_2x_2}{H}.$$

Substitution of the expression for F into the first two conditions gives two restrictions

$$x \geqslant \frac{F_1x_1H}{F_1x_1 + F_2x_2},$$
$$x \leqslant \frac{F_1x_1H}{F_1x_1 + F_2x_2},$$

from which we find a place of application of the minimum force:

$$x = \frac{F_1x_1H}{F_1x_1 + F_2x_2}.$$

Grading system

An answer for F 5
The answer for x 5

Problem 2. Fastest production car

The quadratic dependence of the air drag force F on the speed v of the car has a form

$$F(v) = av^2 + bv + c,$$

where a, b and c are some coefficients. The drag force does not act on the car at rest, so $c = 0$.

We will express the dependence of the capacity on the speed in the form

$$N(v) = Fv = av^3 + bv^2$$

and apply it to each of three cases:

$$\begin{cases} N_1 = av_1^3 + bv_1^2, \\ N_2 = av_2^3 + bv_2^2, \\ N_3 = av_3^3 + bv_3^2, \end{cases}$$

from which we find the coefficients and the required capacity:

$$a = \frac{v_1^2N_2 - v_2^2N_1}{v_1^2v_2^2(v_2 - v_1)} \approx 9{,}2 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{hp}}{(\text{km/h})^3},$$

$$b = \frac{v_2^3N_1 - v_1^3N_2}{v_1^2v_2^2(v_2 - v_1)} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{hp}}{(\text{km/h})^2},$$

$$N_3 = av_3^3 + bv_3^2 = \frac{v_1^2N_2 - v_2^2N_1}{v_1^2v_2^2(v_2 - v_1)} \cdot v_3^3 + \frac{v_2^3N_1 - v_1^3N_2}{v_1^2v_2^2(v_2 - v_1)} \cdot v_3^2 \approx 1{,}35 \cdot 10^3\ \text{hp}.$$

The required coefficient k is equal to a derivative dF/dv for $v \approx 0$:

$$k \approx b = \frac{v_2^3N_1 - v_1^3N_2}{v_1^2v_2^2(v_2 - v_1)} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{hp}}{(\text{km/h})^2}.$$

Note. Real parameters of the car are used in the problem: `https://ru.wikipedia.org/wiki/Bugatti_Veyron`.

Grading system

The dependence of the capacity on the speed 2
An answer for N_3 in the general form 2
The numerical answer for N_3 2
The answer for k in the general form 2
The numerical answer for k 2

Problem 3. Heating of cylinder with piston

Let ν be the amount of each gas, T, P_0 and V_0 are their initial temperature, pressure and volume, respectively, P is their final pressure (it is the same since the piston moves without friction), V_1 and V_2 are the final volumes of the left and right gases, respectively, then from the Mendeleev-Clapeyron equation (the ideal gas law) for the final states of the gases

$$\frac{PV_1}{\nu aT} = \text{const} = \frac{PV_2}{\nu T}$$

and a condition of constancy of the total volume of the gases

$$V_1 + V_2 = 2V_0$$

we will express the final volume of the right gas:

$$V_2 = \frac{2V_0}{a+1}.$$

Work A of the left gas can be found as the work done on the right gas in the isothermal process:

$$A = -\nu RT \ln\frac{V_2}{V_0} = \nu RT \ln\frac{a+1}{2}.$$

From the first law of thermodynamics we find the amounts of heat Q_1 and Q_2, supplied to the left gas and removed from the right one, respectively:

$$Q_1 = \frac{3}{2}\nu R(aT - T) + A = \nu RT\left(\frac{3}{2}(a-1) + \ln\frac{a+1}{2}\right),$$

$$Q_2 = A = \nu RT\ln\frac{a+1}{2}.$$

Thus, a final answer has a form

$$x = \frac{Q_1}{Q_2} = 1 + \frac{3(a-1)}{2\ln\frac{a+1}{2}}.$$

To find x_0, using the result already obtained for x, we make a substitution $a = 1 + b$, where b is an infinitesimal relative change of the temperature of the left gas, and calculate the limit:

$$x_0 = \lim_{b\to 0} x = \lim_{b\to 0}\left(1 + \frac{3b}{2\ln\left(1+\frac{b}{2}\right)}\right) = \lim_{b\to 0}\left(1 + \frac{3b}{2\cdot\frac{b}{2}}\right) = 4.$$

Grading system

An expression for V_2 2
The expression for A 2
The expression for Q_1 2
The answer for x 1
The answer for x_0 3

Problem 4. Stranger among his own

The ideal voltmeter can be replaced by a break in the circuit, since its resistance is much greater than the other ones. In relation to each voltmeter, we will check assumptions that it is ideal.

The first assumption leads to the scheme represented in fig. 8. Let R be the resistance of the voltmeters, then a current strength I through the source is found according to Ohm's law using properties of series and parallel connections:

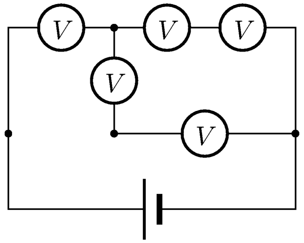

$\mathscr{E}$

Fig. 8

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + \frac{2R}{2}} = \frac{\mathscr{E}}{2R}.$$

The current strength through the lower right voltmeter is $I/2$, therefore, from Kirchhoff's second law we find the voltage on the ideal voltmeter:

$$U = \mathscr{E} - \frac{I}{2}R = \frac{3}{4}\mathscr{E} = 630\text{ V}.$$

Similarly, we consider the remaining assumptions: $U = \frac{7}{8}\mathscr{E} = 735$ V (fig. 9), $U = \frac{1}{6}\mathscr{E} = 140$ V (fig. 10), $U = \frac{5}{7}\mathscr{E} = 600$ V (fig. 11), $U = \frac{4}{5}\mathscr{E} = 672$ V (fig. 12). Thus, an answer has a form

$$U \in \{140; 600; 630; 672; 735\}\text{ V}.$$

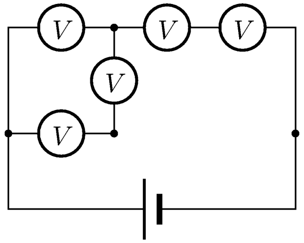

$\mathscr{E}$

Fig. 9

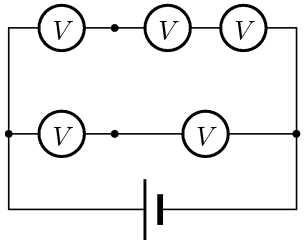

$\mathscr{E}$

Fig. 10

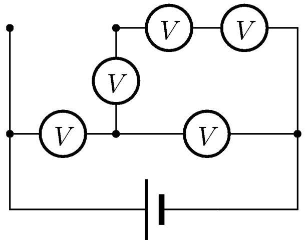

$\mathscr{E}$

Fig. 11

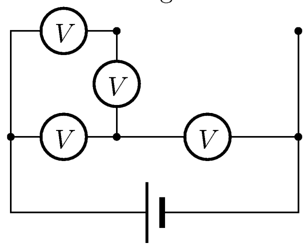

$\mathscr{E}$

Fig. 12

Grading system

Among the answers there is $U = 140$ V 2
Among the answers there is $U = 600$ V 2
Among the answers there is $U = 630$ V 2
Among the answers there is $U = 672$ V 2
Among the answers there is $U = 735$ V 2

For each incorrect value, 1 point is taken off (if a grade does not become negative), for example, the answer $U \in \{140; 600; 630; 672; 700\}$ V is estimated as 7 points, since it contains 4 correct values and 1 erroneous one.

Problem 5. Running source

If the source moves with a constant acceleration vector and at the same time it remains at one distance from a straight line, then it moves parallel to the given line.

From a thin lens formula we express the distance x from the lens to the image and the distance y from the image to the main optical axis:

$$x = \frac{af}{a-f}, \qquad y = -\frac{x}{a}\cdot h = \frac{fh}{f-a}.$$

Projections v_x and v_y of the image velocity along and across the main optical axis we find by differentiating the coordinates with respect to time:

$$v_x = \dot{x} = -\frac{f^2\dot{a}}{(a-f)^2}, \qquad v_y = \dot{y} = \frac{fh\dot{a}}{(f-a)^2}.$$

From a condition of equality of the speeds of the source and image

$$\dot{a}^2 = v_x^2 + v_y^2$$

we write an equation

$$\dot{a}^2 = \frac{f^4\dot{a}^2 + f^2h^2\dot{a}^2}{(a-f)^4},$$

solving which, we get an answer:

$$a = f + \sqrt[4]{f^2(f^2+h^2)}.$$

Grading system

An expression for x 2
The expression for y 2
The expression for v_x 1
The expression for v_y 1
The condition of the equality of the speeds 1
The answer 3

Senior league

Problem 1. Tower of small cubes

A rotation around any horizontal axis passing through a center of the top plate can be represented in a form of a superposition of the rotations around two horizontal axes passing through the centers of the opposite sides of this plate, therefore, it is enough to study stability of an equilibrium position relative to the rotation around one of these axes.

Let φ be the small angle of the rotation of the upper plate about the axis passing through the centers of the opposite sides of this plate, then torque of a force of gravity of the cubes relative to the center of the plate has the form

$$M_1 = Nmg \cdot \frac{Na\varphi}{2} = \frac{1}{2}mga\varphi N^2,$$

and a total moment of the elastic forces of all four springs is given by a formula

$$M_2 = 4 \cdot \left(k \cdot \frac{a\varphi}{2}\right) \cdot \frac{a}{2} = ka^2\varphi.$$

The equilibrium position will be stable if the restoring moment M_2 will be greater than the deflecting moment M_1, i.e. under a condition

$$ka^2\varphi > \frac{1}{2}mga\varphi N^2, \qquad \text{from which} \qquad N < \sqrt{\frac{2ka}{mg}}.$$

Thus, a final answer has the form

$$N = \left[\sqrt{\frac{2ka}{mg}}\right],$$

where the square brackets denote the integer part of the number.

Note. An attentive reader might have noticed that the integer part of the number (the largest integer not exceeding the given number) may be equal to the given number (and not less than it), but this formal mathematical inaccuracy plays no role, since a probability that a continuously distributed physical quantity takes an integer value is equal to zero.

Grading system

Consideration of the superposition of two rotations 2
An expression for M_1 2
The expression for M_2 2
Obtainment of the condition $N < \sqrt{2ka/(mg)}$ 3
The answer with an indication of the integer part 1

Problem 2. Removal of balls

The minimum work, which is necessary to remove the balls, is equal to a change of potential energy of a system, which consists of an increase of the energy of the balls and a decrease of the energy of the liquids, since their centers of masses go down when the liquids occupy a volume previously displaced by the balls.

If a size of the vessel allows the balls to fit, having the centers at the same height, then someone can remove the balls so that they will touch the surface of the upper liquid. However, if the vessel is too narrow (a is less than some a_0), then the center of the upper ball will always be above the center of the lower ball. A difference Δh of the heights of the centers of the balls is minimum, when the balls touch walls of the vessel and each other, i.e. the center of one ball will be at the distance R_1 from two perpendicular walls of the vessel, and the center of the other ball will be at the distance R_2 from the other two walls. Since the distance between the centers of the touching balls is equal to a sum of their radii, a three-dimensional Pythagorean theorem can be written:

$$\Delta h^2 + (a - R_1 - R_2)^2 + (a - R_1 - R_2)^2 = (R_1 + R_2)^2,$$

from which we find the required height difference

$$\Delta h = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - 2(a - R_1 - R_2)^2}$$

and a condition, under which it arises:

$$a < a_0 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}(R_1 + R_2).$$

To calculate the change of the potential energy of the upper ball, the difference ΔH of the heights of bottom points of the balls will be needed:

$$\Delta H = \begin{cases} \Delta h + R_1 - R_2, & \text{if} \quad a < a_0; \\ 0, & \text{if} \quad a \geqslant a_0. \end{cases}$$

From the condition of constancy of the volumes of the liquids, we will express thicknesses h_1 and h_2 of layers of the liquids after removal of the balls:

$$h_1 = 2R_1 - \frac{4\pi R_1^3}{3a^2}, \qquad h_2 = 2R_2 - \frac{4\pi R_2^3}{3a^2},$$

using which, we will find the changes of the potential energies of the liquids:

$$\Delta W_1 = -a^2 h_1 w_1 g \left(R_1 - \frac{h_1}{2}\right),$$

$$\Delta W_2 = -a^2 h_2 w_2 g \left(2R_1 + R_2 - h_1 - \frac{h_2}{2}\right).$$

The changes of the potential energies of the balls have forms

$$\Delta E_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1 g(h_1 + h_2),$$

$$\Delta E_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 \rho_2 g(h_1 + h_2 - 2R_1 + \Delta H).$$

We will write the total change of the potential energy of the system:

$$\Delta E = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta E_1 + \Delta E_2.$$

We note that a situation is possible (the small heavy upper ball in the narrow vessel), when because of a negative value of ΔE_2 the total change ΔE also turns out to be negative, however, the necessary work cannot be negative, so a final answer has the form

$$A = \max(\Delta E; 0).$$

Grading system

An expression for a_0 1
The expression for Δh 1
The expression for ΔH 1
The expression for h_1 1
The expression for h_2 1
The expression for ΔW_1 1
The expression for ΔW_2 1
The expression for ΔE_1 1
The expression for ΔE_2 1
The expression for A 1

Problem 3. Magic heat engine

1. Work A of the gas per cycle is equal to an area bounded by a cycle graph in PV-coordinates:

$$A = PV.$$

An amount of the heat Q_1, supplied during the cycle, can be expressed, applying the first law of thermodynamics for isochoric heating and isobaric expansion:

$$Q_1 = \frac{5}{2}(2P \cdot 2V - P \cdot V) + 2P \cdot (2V - V) = \frac{19}{2}PV.$$

The desired efficiency is found according to a definition:

$$\eta_1 = \frac{A}{Q_1} = \frac{2}{19}.$$

2. The ozone molecule consists of three atoms and is not linear, and that is why it has three rotational degrees of freedom. From a condition of mass conservation

during the described oxygen conversion into the ozone it follows that the oxygen in the amount of ν is converted into the ozone in the amount of $2\nu/3$. Let P_1, T_1, P_2 and T_2 be the pressure and temperature before and after the conversion, respectively, V_0 is the volume (the same before and after the conversion), then from the condition of constancy of the internal energy U we can write equations

$$U = \frac{5}{2}\nu RT_1 = \frac{6}{2}\cdot\frac{2}{3}\nu\cdot RT_2, \qquad U = \frac{5}{2}P_1V_0 = \frac{6}{2}P_2V_0,$$

from which

$$k_1 = \frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{4}, \qquad k_2 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{5}{6}.$$

3. With the described conversion, the work is not done, because the volume does not change, which means, taking into account the constancy of the internal energy (according to the first law of thermodynamics), absence of heat exchange. However, during this conversion, the gas abruptly transitions to a new state on the same isochor that allows reducing the heat exchange with a heater and refrigerator: in the course of an increase of the pressure with the constant volume V it is necessary to convert the ozone into the oxygen, and during a decrease of the pressure with the constant volume $2V$ it is needed to transform the oxygen into the ozone.

Because of the constancy of the internal energy during the conversion, it does not matter, at which moment to perform the conversion, so we can assume, that with the volume V under the pressure P the ozone is converted into the oxygen under the pressure $1.2P$. The amount of heat, supplied during the cycle, has a form

$$Q_2 = \frac{5}{2}(2P\cdot 2V - 1{,}2P\cdot V) + 2P\cdot(2V - V) = 9PV.$$

We will find the desired efficiency according to the definition:

$$\eta_2 = \frac{A}{Q_2} = \frac{1}{9}.$$

Note. The conversion of the oxygen into the ozone is an endothermic chemical reaction, for realization of which one needs a quantity of heat, a tenth of which would be sufficient for the heating of the oxygen by more than one thousand degrees. If this amount of heat is taken into account, the efficiency will fall to almost zero, i.e. there will not be any "improvement".

Grading system

An answer for η_1 3
The answer for k_1 1
The answer for k_2 1
The answer for η_2 5

Problem 4. Little bee

The desired centripetal acceleration is found using a formula $a = \omega v$, where ω is an angular velocity of rotation of a velocity vector, coinciding with the angular velocity of the rotation of the electric field vector.

We choose an origin of a coordinate system in a middle of a line segment connecting the charges, an x-axis is directed to the negative charge (we denote it as $-q$), and the y-axis to the point A, in which the bee is located, when it is equidistant from the charges.

The field strength at the point A is directed along the x-axis and has a form

$$E = E_x = 2\cdot\frac{kq}{r^2}\cdot\frac{l}{r} = \frac{2kql}{r^3},$$

where r is the distance from the point A to each of the charges.

When there is a shift of the bee from the point A for the small distance x along the line of force, we can neglect a change of E_x, but the change of E_y cannot be neglected, since before the shift this component of the field was zero.

Denoting by y the coordinate of the point A, we express E_y after the shift:

$$E_y = \frac{kq}{(l+x)^2+y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}} - \frac{kq}{(l-x)^2+y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}.$$

Using a relationship $r^2 = l^2 + y^2$ and the approximate formula from the problem statement, we transform the obtained expression:

$$E_y = \frac{kqy}{r^3}\left(\left(1+\frac{2lx}{r^2}\right)^{-3/2} - \left(1-\frac{2lx}{r^2}\right)^{-3/2}\right) \approx -\frac{6kqlxy}{r^5}.$$

From this we find the angle of the rotation of the electric field vector for the shift:

$$\varphi \approx \left|\frac{E_y}{E_x}\right| \approx \frac{3xy}{r^2}.$$

Let t be time of the shift of the bee, then we can write the expression

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \approx \frac{3yv}{r^2} = \frac{3v}{l}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{3v}{2l}\sin\gamma,$$

where the formulas are used

$$x = vt, \qquad \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{l}{r}, \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{y}{r}.$$

Thus, the final answer has the form:

$$a = \frac{3v^2}{2l}\sin\gamma.$$

Grading system

The centripetal acceleration formula 1
The expression for E_x 2
The expression for E_y 3

The expression for φ 1
The answer 3

Problem 5. Law of reflection

Let the incident wave reach some points A and B simultaneously (i.e. they belong to a single wave front perpendicular to a direction of propagation of the wave) and the point A lies on the mirror at this time (we will call it the initial time), then a line segment AB forms the angle α with the mirror. Let a ray passing through the point B meet the moving mirror at the point C after some time t, then someone can write $BC \perp AB$ and $BC = ct$ in advance for future calculations, where c is the speed of light.

The wave reflected from the moving mirror will propagate in the same way as the wave reflected from the equivalent stationary mirror AC, so the desired angle φ is equal to the doubled angle between the moving and equivalent mirrors that allows solving the problem purely geometrically.

Let D be a foot of a perpendicular dropped from the point C to the mirror at the initial time, then $CD \perp AD$ and $CD = vt$ are true, since the mirror shifted by a size of DC during the time t. We drop the perpendicular DE from the point D to the line segment AB and the perpendicular CF from the point C to the line segment DE, and we write an expression

$$AD = \frac{ED}{\sin\alpha} = \frac{EF + FD}{\sin\alpha} = \frac{BC + CD\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{c + v\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot t$$

and find the desired angle:

$$\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{CD}{AD}\right) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{v\sin\alpha}{c + v\cos\alpha}\right).$$

The electromagnetic wave can be considered as a flux of photons, each of which has momentum h/λ_0 in the incident wave and h/λ in the reflected one, where h is the Planck constant. From a condition of conservation of the momentum projection on the mirror plane

$$\frac{h}{\lambda_0}\cdot\sin\alpha = \frac{h}{\lambda}\cdot\sin(\alpha - \varphi)$$

we find the length of the reflected wave:

$$\lambda = \lambda_0\cdot\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha}.$$

Methods of special theory of relativity (STR). Using the Lorentz transformations from STR (the special theory of relativity), we will solve the same problem in the different way: we will go to a reference frame of the mirror, change a sign of the momentum projection perpendicular to the mirror and go back to the laboratory reference frame.

We will direct an x-axis perpendicular to the mirror towards the wave, and a y-axis along the mirror in the plane of incidence, then energy and momentum projections of the incident photons will take the form

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0}, \qquad p_{0x} = -\frac{h\cos\alpha}{\lambda_0}, \qquad p_{0y} = \frac{h\sin\alpha}{\lambda_0}.$$

We will introduce usual STR notations

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

and using the inverse Lorentz transformations, we will express the energy and momentum projections of the incident photons in the mirror reference frame:

$$E_0' = \gamma(E_0 - \beta c p_{0x}) = \frac{\gamma hc}{\lambda_0}(1 + \beta\cos\alpha),$$

$$p_{0x}' = \gamma\left(p_{0x} - \beta\frac{E_0}{c}\right) = -\frac{\gamma h}{\lambda_0}(\beta + \cos\alpha),$$

$$p_{0y}' = p_{0y} = \frac{h\sin\alpha}{\lambda_0}.$$

The energy and projections of the momentum of the reflected photons in the mirror reference frame have the form

$$E' = E_0' = \frac{\gamma hc}{\lambda_0}(1 + \beta\cos\alpha),$$

$$p_x' = -p_{0x}' = \frac{\gamma h}{\lambda_0}(\beta + \cos\alpha),$$

$$p_y' = p_{0y}' = \frac{h\sin\alpha}{\lambda_0}.$$

Using the direct Lorentz transformations, we will express the same quantities in the laboratory reference frame:

$$E = \gamma(E' + \beta c p_x') = \frac{\gamma^2 hc}{\lambda_0}(1 + 2\beta\cos\alpha + \beta^2),$$

$$p_x = \gamma\left(p_x' + \beta\frac{E'}{c}\right) = \frac{\gamma^2 h}{\lambda_0}(2\beta + (1+\beta^2)\cos\alpha),$$

$$p_y = p_y' = \frac{h\sin\alpha}{\lambda_0}.$$

From this we find the unknown quantities (a value of p_x is not involved in the calculations and was written out above only for beauty):

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{\lambda_0}{\gamma^2(1+2\beta\cos\alpha+\beta^2)} = \frac{\lambda_0(c^2-v^2)}{c^2+2cv\cos\alpha+v^2},$$

$$\varphi = \alpha - \arcsin\left(\frac{p_y c}{E}\right) = \alpha - \arcsin\left(\frac{(c^2-v^2)\sin\alpha}{c^2+2cv\cos\alpha+v^2}\right).$$

Someone can make sure that these expressions can be transformed into the form, in which the answers were received in the geometric way.

Grading system

An idea to replace the moving mirror by the equivalent stationary one 2
The answer for φ 4
The law of the momentum projection conservation 1
The answer for λ...3