МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
САХА (ЯКУТИЯ)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА „ТУЙМААДА–2018“ (математика)

Второй день

Якутск 2018

Сборник содержит задачи XXV Международной олимпиады школьников „Туймаада“ по математике. Задания подготовлены при участии членов Методического Совета Всероссийской математической олимпиады школьников. В составлении задач сборника приняли участие: А. Альцгеймер, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, Н. Ю. Власова, А. С. Голованов, К. П. Кохась, А. С. Кузнецов, Ф. В. Петров. Компьютерный макет: М. А. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводится 5 часов.

Старшая лига

5. Дано натуральное число n и простое число p. Оказалось, что произведение

$$(1^3+1)(2^3+1)\ldots((n-1)^3+1)(n^3+1).$$

делится на p^3. Докажите, что $p \leqslant n+1$. (*Z. Luria*)

6. Докажите, что при x, y, $z \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$(x^3+2y^2+3z)(4y^3+5z^2+6x)(7z^3+8x^2+9y) \geqslant 720(xy+yz+xz).$$

(*К. Кохась*)

7. В школе три седьмых класса по M учеников в каждом. Каждый семиклассник знаком по крайней мере с $\frac{3}{4}M$ семиклассниками из каждого из остальных классов. Докажите, что школа может послать на олимпиаду M команд, каждая из которых состоит из трех знакомых друг с другом семиклассников, которые учатся в трех разных классах. (*C. Magyar, R. Martin*)

8. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны, вписан в окружность с центром в точке O. Касательные к этой окружности в точках A и C вместе с прямой BD образуют треугольник Δ. Докажите, что описанные окружности треугольников OD и Δ касаются. (*А. Кузнецов*)

Младшая лига

5. На столе лежат 99 одинаковых с виду шаров, 50 из них — медные, и 49 — цинковые. Лаборант пронумеровал шары. За одну проверку на спектрометре можно выяснить, сделаны ли положенные в него два шара одного и того же металла. Но результаты выдаются только на следующий день. За какое минимальное число проверок можно узнать, из какого металла сделал каждый шар, если надо все проверки провести сегодня? (*Н. Власова, С. Берлов*)

6. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1024. Их разбивают на пары, потом каждую пару стирают и на её место записывают (неотрицательную) разность чисел в паре. Полученные 512 чисел снова разбивают на пары и т. д. После десяти операций на доске остаётся одно число. Чему оно может быть равно? (*А. Голованов*)

7. Докажите, что при x, y, $z \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$(x^3+2y^2+3z)(4y^3+5z^2+6x)(7z^3+8x^2+9y) \geqslant 720(xy+yz+xz).$$

(*К. Кохась*)

8. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны, вписан в окружность с центром в точке O. Касательные к этой окружности в точках A и C вместе с прямой BD образуют треугольник Δ. Около треугольника OAC описана окружность ω. Докажите, что описанные окружности треугольников OD и Δ касаются и их точка касания лежит на окружности ω. (*А. Кузнецов*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Старшая лига

5. Предположим, что $p > n+1$. Пусть число k^3+1 при некотором k, где $1 \leqslant k \leqslant n$, делится на p. Так как $k^3+1 = (k+1)(k^2-k+1)$, а $k+1 < p$, то на p делится число k^2-k+1. При этом, $k^2-k+1 < p^2$, поэтому оно содержит p только в первой степени.

Значит, существуют различные натуральные числа k, m и ℓ, не превосходящие n, такие что k^2-k+1, m^2-m+1 и $\ell^2-\ell+1$ делятся на p. Тогда на p делится и число

$$(k^2-k+1)-(m^2-m+1) = k^2-m^2-(k-m) = (k-m)(k+m+1).$$

Заметим, что первый множитель мал: $0 < |k-m| < n < p$, поэтому на p делится второй множитель $k+m+1$. Но $0 < k+m+1 < 2n+1 < 2p$, поэтому делимость возможна только при $k+m+1 = p$. Заменяя m на ℓ, аналогично получим, что $k+\ell+1 = p$. Следовательно, $m = \ell$, что противоречит нашему предположению.

6. Раскроем скобки:

$$\begin{aligned}
&(x^3+2y^2+3z)(4y^3+5z^2+6x)(7z^3+8x^2+9y) = \\
&= (48x^6+72y^6+105z^6)+ && (1)\\
&+(54x^4y+32x^5y^3+96x^3y^2+64x^2y^5+108xy^3+36x^3y^4)+ && (2)\\
&+(42x^3z^3+40x^5z^2+144x^3z+35x^3z^5+126xz^4+120x^2z^3)+ && (3)\\
&+(56y^5z^3+90y^3z^2+108y^4z+135z^3y+84z^4y^3+70y^2z^5)+ && (4)\\
&+(28x^3y^3z^3+45x^3yz^2+84xy^2z^3+80x^2y^2z^2+162xyz+96x^2y^3z) && (5)
\end{aligned}$$

Для оценки снизу выражений во второй, третьей и четвертой строках заменим показатели всех степеней на единицы. Для выражения в первой строке воспользуемся очевидным неравенством

$$\begin{aligned}
48x^6+72y^6+105z^6 = 7.5(x^6+y^6)+64.5(y^6+z^6)+40.5(x^6+z^6) \geqslant \\
\geqslant 15x^3y^3+129y^3z^3+81x^3z^3 \geqslant 15xy+129yz+81xz.
\end{aligned}$$

Отметим, что суммы коэффициентов слева и справа равны: $48+72+105 = 15+129+81$. Таким образом, выражение записанное в первой–четвертой строках больше либо равно

$$405xy+588xz+672yz.$$

Осталось проверить, что выражение в пятой строке больше либо равно

$$315xy + 132xz + 48yz.$$

Для этого не видно никаких препятствий.

7. Рассмотрим граф G, в котором ученики — это вершины, а две вершины соединены ребром, если соответствующие ученики знакомы друг с другом и учатся в разных классах. Так как ученики одного класса не соединены ребром, этот граф трехдольный (каждая доля соответствует одному классу).

Выберем произвольно две доли и докажем, что в подграфе на этих долях найдется совершенное паросочетание.

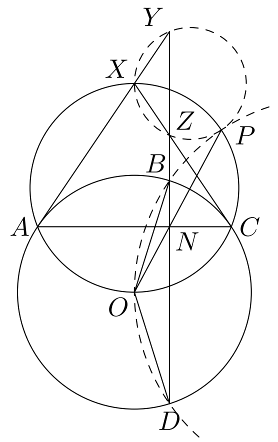
Лемма. Если в двудольном графе каждая доля содержит M вершин и каждая вершина смежна не менее чем с $M/2$ вершинами второй доли, то в данном графе есть совершенное паросочетание.

Доказательство. Проверим условие теоремы Холла: любые k человек из первой доли знакомы в совокупности хотя бы с k людьми из второй доли.

Если $k \leqslant \frac{M}{2}$, то условие выполнено, так как любой из этих k человек знает не менее $\frac{M}{2} \geqslant k$ человек из второй доли. Если $k > \frac{M}{2}$, то любой человек из второй доли знаком хотя бы с одним из этих k людей, поэтому любые k человек из первой доли в совокупности знают M человек из второй доли. Лемма доказана.

Итак, в графе G существует совершенное паросочетание между вершинами второй и третьей доли. Теперь рассмотрим еще один двудольный граф H: его первая доля совпадает с первой долей графа G, а в качестве вершин второй доли возьмем ребра найденного паросочетания. Мы соединяем в графе H вершину первой доли с ребром из паросочетания в том случае, если оба конца ребра были смежны с этой вершиной в графе G. В графе H степень каждой вершины не меньше $\frac{M}{2}$. Действительно, каждый из концов одного ребра был смежен в графе G хотя бы с $\frac{3}{4}M$ вершинами первой доли, поэтому найдутся не менее $\frac{M}{2}$ вершин, с которыми смежны оба конца. И наоборот, каждая вершина V первой доли смежна в графе G хотя бы с $\frac{3}{4}M$ вершинами из второй и $\frac{3}{4}M$ вершинами из третьей доли. Поэтому найдутся хотя бы $\frac{M}{2}$ ребер паросочетания таких, что вершина V смежна с обоими концами этих ребер. По лемме, в графе H тоже есть совершенное паросочетание. Теперь требуемые тройки можно составить из вершин первой доли и концов сопоставленных им ребер.

8. Обозначим точку пересечения касательных, проведенных в точках A и C, через X, прямых AX и BD — через Y, прямых CX и BD — через Z, прямых AC и BD — через N. Треугольник Δ — это XYZ.



По свойству касательных $\angle OAX = \angle OCX = 90°$, поэтому четырехугольник $OAXC$ вписанный.

Л е м м а. Описанные окружности треугольников OBD, Δ и четырехугольника $OAXC$ имеют общую точку.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямая BD — радикальная ось описанных окружностей треугольника OBD и четырехугольника $ABCD$, прямая AC — радикальная ось описанных окружностей четырехугольников $ABCD$ и $OAXC$. Следовательно, точка N — радикальный центр описанных окружностей OBD, $ABCD$, $OAXC$, и прямая ON проходит через точку $P \neq O$ пересечения описанных окружностей OBD и $OAXC$. Докажем, что четырехугольник $ZXYP$ вписанный, это равносильно утверждению леммы.

Пусть $\angle XAC = \angle XCA = \alpha$, $\angle PAC = \beta$. Прямая YZ параллельна XO, поэтому $\angle XYZ = \angle AXO = 90° - \alpha$. Достаточно доказать, что $\angle XPZ = 90° - \alpha$.

На отрезке XC выберем точку Z' такую, что $\angle XPZ' = 90° - \alpha$. Легко видеть, что $\angle OPC = \angle OXC = 90° - \alpha$. Кроме того, $\angle XPO = 90°$, поэтому $\angle Z'PN = \alpha = \angle Z'CN$ и четырехугольник $Z'PCN$ вписанный. Следовательно, $\angle Z'NC = 180° - \angle Z'PC = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$. То есть $Z = Z'$ и четырехугольник $XYPZ$ вписанный. Лемма доказана.

Далее заметим, что диаметр описанной окружности $OAXC$ касается описанной окружности $XYPZ$, поэтому касательные к этим двум окружностям в точке X перпендикулярны. Следовательно, касательные к этим двум окружностям в точке P перпендикулярны. Аналогично касательные к описанным окружностям $OAXC$ и OBD в точке P перпендикулярны. То есть касательные к описанным окружностям $XYPZ$ и OBD в точке P совпадают, а сами эти окружности касаются друг друга.

Младшая лига

5. О т в е т: за 98 проверок.

Алгоритм. Выберем один шар и сравним его с каждым из оставшихся. После получения результатов проверок, все шары разобъем на две группы: сделанные из того же металла, что и выбранный (в том числе, сам выбранный) и сделанные из другого металла. В одной из групп будет 50 шаров — это медные шары, а во второй — 49, это цинковые шары.

Оценка. Предположим, что мы провели не более 97 проверок. Рассмотрим граф, в котором вершины — это шары, а ребро проведено в том случае, если соответствующая пара шаров проверялась на спектрометре. Так как ребер меньше 98, этот граф несвязен.

Если в графе есть хотя бы одна компонента связности с четным числом вершин, покрасим все вершины графа в черный и белый цвета, так, чтобы всего было 50 белых и 49 черных, причем в четной компоненте черных и белых вершин было поровну. Если белые вершины соответствуют медным шарам, а черные — цинковым, то каждый тест, соответствующий ребру, определял, одинакового ли цвета концы ребра. Если поменять цвета вершин в четной компоненте на противоположные, результаты всех тестов не изменятся. Таким образом, в этом случае невозможно определить однозначно типы шаров.

Если же в графе нет компонент с четным числом вершин, то количество компонент с нечетным числом вершин не меньше 3. Объединим мысленно вершины двух компонент в одно множество и проделаем аналогичный фокус.

6. Ответ: можно получить любое четное число от 0 до 1022.

Покажем, как получить любое четное число от 0 до 1022. Пусть мы хотим получить число $2k$. На первом шаге поставим в пару числа 1 и $2k+2$, а остальные числа разобъем на пары так, чтобы каждая пара состояла из двух последовательных чисел. Тогда после первой операции мы получим число $2k+1$ и 511 единиц. После второго шага мы получим $2k$ и 255 нулей. Очевидно, что в итоге останется $2k$.

Очевидно, что 1024 мы получить не сможем. Кроме того, при такой операции сохраняется четность суммы всех выписанных чисел. Изначально сумма равна $1+2+\ldots+1024 = 1025\cdot 512$, то есть четна, поэтому и когда останется одно число, оно будет четным.

7. См. задачу 6 старшей лиги.

8. См. задачу 8 старшей лиги.